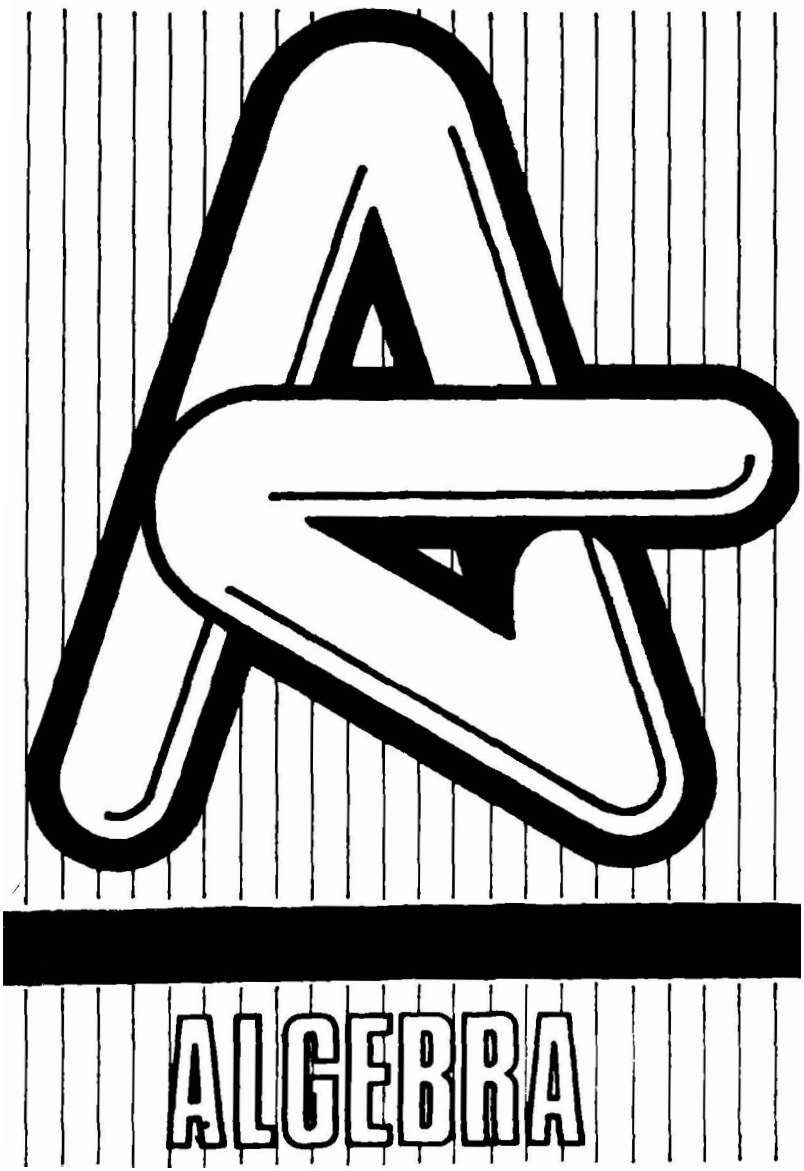
silviu stössel




# CULEGERE DE PROBLEME PENTRU ADMITEREA IN INVATAMINTUL SUPERIOR

Editura Cuvîntul Român

# SERIA STIINTA SI TEHNICA

Această culgere are ca primă calitate conciziunea. Prin intermediul unui număr relativ mic de probleme, autorul reuşeşte să abordeze tooate capitolele algebrei şcolare. Selecţia făcută evită locurile comune şi evidenţiază problemistica autentică, generatoare de idei noi, de metode eficiente de rezolvare.

Dificultatea unora dintre probleme este compensată de claritatea soluţiilor prezentate de un autentic profesionist.

Dr. LAURENŢIU PAPAITOPOL
Facultatea de matematică
din Universitatea Bucureşti

# BIBLIOTECA CUVINTUL ROMANESC

SILVIU STÖSSEL

# ALGEBRĂ

## PENTRU
## ADMITEREA ÎN ÎNVĂŢĂMÎNTUL SUPERIOR

EDITURA „CUVÎNTUL ROMÂNESC"
BUCUREŞTI, 1991

COPERTA — *EMANUEL-ION RĂDULESCU*
TEHNOREDACTOR — *MARIN RĂDULESCU*

**ISBN 973-9031-06-4**

*Părinților mei,*
*Florentina și Iosif*
*Soției mele,*
*Elena*

## *Prefață*

*Alcătuind această lucrare, am încercat să pun la dispoziția publicului o colecție reprezentativă de probleme de algebră. Intenția a fost de a ilustra cît mai multe dintre ideile și metodele algebrei studiate în liceu, evitînd repetițiile sau faptele standard, cunoscute din alte lucrări de circulație largă.*

*Am plecat de la ipoteza conciziunii, numărul de probleme fiind de 132. In același timp însă, nu am făcut economie de spațiu în redactarea cu claritate și rigoare a soluțiilor.*

*In elaborarea acestei lucrări i-am avut în vedere în special pe candidații la examenele de admitere în facultăți, pe participanții la olimpiade și pe colegii mei, profesorii de liceu. Sperăm ca prezenta colecție să fie o pledoarie pentru studierea mai aprofundată a aspectelor variate și uneori subtile ale algebrei predate în liceu.*

*Vom fi receptivi la observațiile și sugestiile vizînd îmbunătățirea materialului prezentat.*

*Mulțumim domnului profesor Țena Marcel care a scris în mod special pentru această lucrare problemele 69 și 70.*

*De asemenea mulțumim domnului conf. dr. Paltin Ionescu pentru preocuparea manifestată în legătură cu această carte.*

*In final aducem mulțumiri editurii pentru oferta de a publica această carte și pentru condițiile grafice ale lucrării.*

***Autorul***

## *Summary*

*In writing down this book I have tried to offer the interested reader a illustrative collection of problems in algebra. It was our intention to illustrate many of the ideas and methods of College algebra avoiding repetitions and standard facts which are easy to find in most well-known works.*

*The book contains 132 problems, approximately equal distributed according to the our schedules of the 4 years of College algebra as well as a clear and rigurous exposition of the solutions to all of them.*

*The prezent work is adressed mainly to those preparing either for the maths competition (olimpics) or for the entrance exams to various faculties, as well as to those teaching College algebra. We hope the present collection will provide stimuli for a deeper study of the multiple and subtile aspects of College algebra.*

*Author*

# INDICE DE AUTORI*

Indicăm aici numele autorilor de drept ai exerciţiilor şi problemelor din această lucrare, cinstind astfel activitatea lor şi cărora le adresăm mulţumiri.

**Albu Toma** (67)
**Andreescu Titu** (47)
**Burtea Marius** (15, 62)
**Cocea Constantin** (44)
**Ion D. Ion** (47)
**Miheţ Dorel** (43)
**Niculescu Liliana** (49)
**Rădulescu Sorin** (41)
**Schwartz Dan** (38)
**Sîrbu Niculae** (17)
**Andronache Marian** (68)
**Bătineţu-Giurgiu Dumitru** (17)
**Buşneag Dumitru** (4, 42)
**Dincă Dumitru** (4)
**Maftei Ioan** (51)
**Nedelcu Ion** (14)
**Paniatopol Laurenţiu** (97—99)
**Pamfil Toma** (40)
**Savu Ion** (50, 64)
**Ţena Marcel** (66, 69, 70, 90)
**Stossel Silviu** (1, 2, 5, 7, 8, 10—13, 18—34, 39, 48, 52, 55, 59—61, 63, 71—84, 86—89, 91—93, 95, 100—104, 106—113, 116, 120—130, 132)
* * * (3, 6, 9, 16, 35—37, 45, 46, 56 57, 65, 85, 94, 96, 105, 114, 115, 117—119, 131)

Cu indicativul * * * se trec, în general, exerciţiile foarte cunoscute sau exerciţiile ai căror autori, de-a lungul anilor, au intrat în anonimat.

Includerea sau menţionarea problemelor din această carte se poate face numai cu indicarea numelui autorului ei de dretp.

**Autorul**

---

* În paranteză sînt trecute numerele de ordine ale problemelor.

# ENUNȚURI

**1:** Să se raționalizeze numitorul fracției.

$$\frac{1}{6\sqrt[n]{4} - 11\sqrt[n]{2} + 3}, \quad (\forall)\ n \geqslant 2,\ n \in \mathbf{N}.$$

**2:** Să se rezolve ecuația:

$$5[x] + 2(x) = \frac{25 - 3x}{3}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă, iar $(x)$ cel mai apropiat întreg de numărul real $x$.

**3:** Să se rezolve, în numere întregi, ecuația: $7x + 2y = 3$.

**4:** Să se arate că $\sin 1^\circ + \cos 1^\circ \notin \mathbf{Q}$.

**5:** Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$f(x) + 2f(1 - x) = |x + 1|, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

**6:** Să se rezolve ecuația: $z^2 + (i - 1)z + i + 2 = 0$.

**7.** Determinați $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $[x^2 - 2x + 3] = [x + 2]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $x$.

**8:** Să se determine $x, y, z \in \mathbf{Z}$, $x \neq y \neq z$, astfel încît

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2xz = 4y - 1.$$

**9:** Să se arate că $\sqrt[3]{3} + \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

**10:** Să se determine $|A|$ și $|B|$ unde

$$A = \left\{ x_n \in \mathbf{R} \mid x_n = \frac{4n^2}{n + 1},\ n = \overline{1,100} \right\}$$

$$B = \left\{ y_n \in \mathbf{R} \mid y_n = \frac{n^2 - x + 4}{n^2 + 1},\ n = \overline{1,100} \right\}$$

și $|M|$ reprezintă numărul elementelor mulțimii $M$.

**11.** Să se arate că $(\forall)\ p \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și $(\forall)\ k \in \mathbf{N}^*$, $k < 2p - 1$ avem că $[(p + \sqrt{p^2 - k})^n]$ este un număr impar, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$. Aplicație. Să se arate că $[(45 + \sqrt{1975})^n]$ este impar (O.I.M. — 1975).

**12.** Se consideră $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 3x + 4}{x^5 - 7x + 2}$, $f: D \to \mathbf{R}$, unde $D \subset \mathbf{R}$ este domeniul maxim de definiție al funcției $f$. Dacă $x_1$, $x_2$, $x_3$ sînt rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$, atunci

a) $x_1, x_2, x_3 \in D$, b) $f(x_1) + f(x_2) = 2$.

**13.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația

$$x^3 + (m - 2)x^2 - (2m^2 - m - 1)\,x + m^2 - m = 0,\ m \in \mathbf{R}$$

și apoi, să se determine $m \in \mathbf{Z}$ astfel ca toate rădăcinile ecuației date să fie întregi.

**14.** Fie $f : M \to M$, $M \subset \mathbf{R}$, o funcție bijectivă cu proprietatea că

$$f(x) + f^{-1}(x) = x,\ (\forall)\ x \in M.$$

Să se arate că

a) $M$ este mulțime simetrică, b) $f$ este impară.

**15.** Să se determine toate funcțiile bijective $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că funcțiile $g_f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{Q}_+$, $g_f(n) = \dfrac{n}{f(n)}$ sînt crescătoare.

**16.** Fie $z_1, z_2, \ldots, z \in \mathbf{C}^*$ avînd același modul. Să se arate că

$$Re\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_j}{z_k}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

***

**17.** Să se determine toate funcțiile $f : \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \to \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ cu proprietatea că

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |x \sin 2x - y \sin 2y|,\ (\forall)\ x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

**18.** Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ toți divizorii primi, distincți ai numerelor naturale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > m$. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} < \prod_{k=1}^{n}\frac{p_k}{p_k - 1}$$

**19.** Să se determine funcțiile polinomiale $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel ca

$$(fof)(x) = x^{n^2}(x + 1)^n (x^{n+1} + x^n + 1),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

**20.** Fie $\varepsilon$ o rădăcină primitivă de ordinul $n$ a unității. Să se arate că pentru orice polinom $f \in \mathbf{R}[X]$ cu grad $f = n$ avem

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon^k) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{\varepsilon^k}\right) \in \mathbf{R}.$$

21. Fie $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ și $x_5$ rădăcinile ecuației algebrice

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,\ a_0 \neq 0,\ a_5 \neq 0.$$

Să se calculeze

$$S_4 = \sum_{k=1}^{5} x_k^4,\ S_3 = \sum_{k=1}^{5} x_k^3,\ T_4 = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x_k^4},\ T_3 = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x_k^3}.$$

22. Să se arate că: $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$.

Generalizare. Dacă $u,\ v,\ p,\ q \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $u + v \leqslant p + q$ și $uv < pq$ atunci $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \leqslant \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

23. Să se rezolve ecuațiile

a) $2^{\log_3 x} = -x + 2$, b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = x$.

24. Să se rezolve

a) $6 - 2^n = \log_2 (3^n - 5),\ n \in \mathbf{N}$,

b) $\log_3 (2^x + 1) = \log_2 (3^x - 1)$

25. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2^y - \log_3 x = 3 \\ 3^x + \log_2 y = 28 \end{cases}$$

26. Să se determine un polinom, cu coeficienți întregi, care să admită rădăcina $\sqrt[3]{2} + i$. Puteți determina și celelalte rădăcini ale acestui polinom?

27. Fie $x$ o rădăcină a polinomului $f = X^4 - X + 1$. Să se determine un polinom $g \in \mathbf{Q}[Y]$ care să admită o rădăcină $y = x^3 - x$.

28. Fie polinomul $f = a_1X^{p_1} + a_2X^{p_2} + \ldots + a_{n-1}X^{p_{n-1}} + a_n, f \in \mathbf{C}[X]$ cu $p_1 > p_2 > \ldots > p_{n-1},\ p_i \in \mathbf{N}^*,\ (\forall)\ i = \overline{1, n-1}$. Să se arate că restul împărțirii polinomului $f$ la $g = X^m - b,\ m \in \mathbf{N}^*$ este

$$r = a_1b^{c_1}X^{r_1} + a_2b^{c_2}X^{r_2} + \ldots + a_{n-1}b^{c_{n-1}}X^{r_{n-1}} + a_n$$

unde $c_k$, respectiv $r_k$, reprezintă cîtul, respectiv restul, împărțirii lui $p_k$ la $m$, $(\forall)\ k = \overline{1, n-1}$.

29. Să se determine restul împărțirii polinomului

$$f = X^{56} + 7X^{19} - 6X^{14} + 2X + 1 \text{ la } g = X^{12} + 3.$$

30. Fie $x$ o rădăcină a polinomului $X^3 - X - 1$. Să se raționalizeze numitorul fracției $\frac{1}{1 + x^2}$, adică să se determine un polinom $f \in \mathbf{Q}[X]$ astfel încît $\frac{1}{1 + x^2} = f(x)$.

**31.** Să se determine restul împărțirii polinomului

$$f = 3X^{10^n+18n-28} + 5X^{3(4^n+15n-1)} - 9X^3 + 2X - 1$$

la polinomul $g = X^{27} - 1$, pentru orice $n$ număr natural.

**32.** Fie $x_1$, $x_2$, respectiv $y_1$, $y_2$, $y_3$, rădăcinile polinomului $X^2 - 2X + 2$, respectiv $Y^3 - 2$. Să se determine un polinom $f \in \mathbf{Z}[T]$ care are o rădăcină $t = x_1^4 + y_3^2$

**33.** Să se arate că dacă $x_1$, $x_2$, $x_3$ sînt rădăcinile ecuației

$x^3 - x + 1 = 0$ atunci expresia

$$\frac{x_1(1 - x_1^2 + x_3)}{x_2^2}$$

este constantă.

**34.** Să se arate că toate ecuațiile algebrice de gradul al treilea, care au coeficienții în progresie aritmetică neconstantă și rădăcinile în progresie geometrică neconstantă sînt de forma $3rx^3 + rx^2 - rx - 3r = 0$, $r \neq 0$.

**35.** Să se determine toate permutările $x \in S_6$ astfel încît

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

**36.** Să se descompună în produs de cicli disjuncți permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 2 & 8 & 5 & 3 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

**37.** Să se determine ordinul permutării

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 5 & 11 & 6 & 1 & 9 & 2 & 3 & 10 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

**38.** Fie $S_n$ mulțimea permutărilor mulțimii $\{1,2, \ldots, n\}$ și $M_n$ mulțimea acelor permutări $\sigma \in S_n$ pentru care există $\tau \in S_n$ astfel încît numerele $\sigma(1) + \tau(1)$, $\sigma(2) + \tau(2)$, ..., $\sigma(n) + \tau(n)$ să fie consecutive. Să se arate că $M_n \neq \Phi$ dacă și numai dacă $n$ este impar și atunci

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\sigma_1(k) = \sum_{k=1}^{n} k\,\sigma_2(k), (\forall)\ \sigma_1, \sigma_2 \in M_n.$$

**39.** Să se arate că

$$A_n = \{\tau^2 \mid \tau \in S_n\} \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

unde $A_n$ este mulțimea permutărilor pare din $S_n$.

**40.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$. Să se calculeze

$$det\,(A + A^2 + \ldots + A^n),\ n \in \mathbf{N}^*$$

**41.** Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încît $AB = O_n$. Să se arate că

$$det\ (I_n + A + B + A^2 + B^2) \geqslant 0.$$

**42.** Dacă $A$, $B$, $C \in M_3(\mathbf{R})$ astfel încît comută două cîte două atunci

$$det\ (A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - AC) \geqslant 0.$$

**43.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a + d \neq 0$, $A \in M_2(\mathbf{R})$. Să se arate că $B \in M_2(\mathbf{R})$ comută cu $A$ dacă și numai dacă comută cu $A^2$.

**44.** Dacă $n \in 2\mathbf{N} + 1$ și $A \in M_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $A^2 = O_n$ sau $A^2 = I_n$ atunci $det\ (A + I_n) \geqslant det\ (A - I_n)$

**45.** Fie $(a_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de numere reale definit astfel: $a_1$, $a_2$ dați și $a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Considerăm ecuația $x^2 = ax + b$ (numită euație caracteristică) cu rădăcinile $r_1$ și $r_2$.
Caz 1. Dacă $r_1 \neq r_2$ atunci $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.
Caz 2. Dacă $r_1 = r_2 = r$ atunci $a_n = (\alpha + \beta n) r^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. În ambele cazuri $\alpha$ și $\beta$ se determină din condițiile inițiale.
Aplicație. Să se determine șirurile $(x_n)_{n \geqslant 0}$ și $(y_n)_{n \geqslant 0}$ definite prin $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ și $x_{n+1} = 3x_n + y_n$,

$$y_{n+1} = -x_n + y_n,\ (\forall)\ n \geqslant 0.$$

**46.** Fie $(a_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de numere reale definit astfel: $a_1$, $a_2$, $a_3$ dați și $a_{n+3} = a \cdot a_{n+2} + b \cdot a_{n+1} + c \cdot a_n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. Considerăm ecuația caracteristică $x^3 = ax^2 + bx + c$ cu rădăcinile $r_1$, $r_2$, $r_3$.
Caz 1. Dacă $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ atunci $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.
Caz 2. Dacă $r_1 = r_3 \neq r_2$ atunci $a_n = (\alpha + \beta n) r_1^n + \gamma r_2^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$.
Caz 3. Dacă $r_1 = r_2 = r_3 = r$ atunci $a_n = (\alpha + \beta n + \gamma n^2) r^n$, $(\forall)\ n \geqslant 1$. În toate cazurile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se determină din condițiile inițiale.
Aplicație. Să se determine șirurile $(x_n)_{n \geqslant 1}$, $(y_n)_{n \geqslant 1}$ și $(z_n)_{n \geqslant 1}$ definite astfel: $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 0$ și

$$x_{n+1} = x_n + y_n,\ y_{n+1} = x_n + z_n,\ z_{n+1} = y_n + z_n,\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

**47.** Fie $p$ și $q$ două numere reale astfel încît $p^2 - 4q < 0$. Să se arate că dacă $n$ este un număr natural impar și $A \in M_n(\mathbf{R})$ atunci $A^2 + pA + qI_n \neq O_n$.

**48.** Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine un polinom de grad minim care are pe $A$ ca rădăcină. Să se calculeze $A^n$ și $det\ (A^n)$ $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

**49.** Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $A^2 = I_n$. Demonstrați că $(\forall)\ X \in M_n(\mathbf{R})$ $(\exists)\ Y, Z \in M_n(\mathbf{R})$, unice, astfel încît

$$X = Y + Z,\ AY = Y,\ AZ = -Z.$$

**50.** Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ să se determine matricea $X \in M_2(\mathbf{C})$ astfel ca

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**51:** Fie $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încît

$$ABC + AB + BC + AC + A + B + C = O_n.$$

Să se arate că $A$ și $B + C$ comută dacă și numai dacă matricile $A$ și $BC$ comută.

* * * *

**52.** Fie $a \in \mathbf{R}$ și intervalul $(a, +\infty)$. Să se arate că

i) operația $x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$, determină pe intervalul $(a, +\infty)$ o structură de grup, notat $G_a$; ii) $(\forall)\ a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow G_a \simeq G_b \simeq (\mathbf{R}, +)$.

**53.** Fie $k \in \mathbf{Z}$. Să se determine $l, m > \mathbf{Z}^*$ astfel încît operația $x * y = lx + my + k$ se definească pe $\mathbf{Z}$ o structură de grup notat $G_k$. Să se arate că $(\forall)\ k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ avem

$$G_{k_1} \simeq G_{k_2} \simeq (\mathbf{Z}, +)$$

**54.** Fie $n \in \mathbf{N}^*$ fixat și $p_1, p_2, \ldots, p_m$ toate numerele naturale prime, distincte, mai mici sau egale cu $n$. Considerăm

$$\vartheta = \left\{(p_1^{k_1}, \ldots, p_l^{k_l}) \mid l \in \mathbf{N}^*, k_1, \ldots, k_l \in \mathbf{N}^*, \sum_{i=1}^{l} p_i^{k_i} \leqslant n,\ l \leqslant n\right\}$$

Atunci ordinul maxim al unui subgrup ciclic din $S_n$ este

$$\max\left\{\prod_{i=i}^{l} p_i^{k_i} \mid (p_1^{k_1}, \ldots, p_l^{k_l}) \in \vartheta\right\}$$

**55.** Fie $S_n$ grupul permutărilor de $n$ elemente. Să se demonstreze că orice element din $S_n$ este de ordin $\leqslant 60$ dacă și numai dacă $n \leqslant 13$.

**56.** Fie $(G_1, o)$ un grup și $G_2$ o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție notată $*$, astfel încît există $f: G_1 \to G_2$, o funcție bijectivă cu proprietatea că $f(x_1 o x_2) = f(x_1) * f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in G_1$. Să se arate că $(G_2, *)$ este grup.

**57.** Fie $A_1$ și $A_2$ două inele și $A_1[X]$, $A_2[X]$ inelele lor de polinoame. Dacă $\varphi : A_1[X] \to A_2 X]$ este un izomorfism de inele atunci polinomul $f$ este ireductibil (resp. reductibil) peste $A_1$ dacă și numai dacă polinomul $\varphi(f)$ este ireductibil (resp. reductibil) peste $A_2$.

Aplicație. Să se arate că $\mathbf{R}[X]$ și $\mathbf{C}[X]$ nu sînt izomorfe.

58. Să se arate că polinomul $X^4 + 4X + 9$ este ireductibil peste $\mathbf{Z}$.

**59.** Fie $A$ un inel finit. Să se arate că dacă ecuația $x^2 = x$ are în $A$ cel mult două soluții, atunci $\min\{n \mid n \cdot 1 = 0, n > 0\}$ este de forma $p^r$, unde $p$ este un număr prim și $r \in \mathbf{N}$.

**60.** Fie $A$ un inel și $a \in A$ astfel încît $a$ și $1 - a^n$ sînt inversabile. Să se arate că elementul $a + a^2 + \ldots . a^n$ este inversabil.

**61.** Fie $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un grup. Dacă $a_i a_j = a_j a_i$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ atunci $G$ este comutativ.

**62.** Se consideră mulțimea $M = \{E, A, B, C\} \subset M_2(\mathbb{C})$, care formează grup față de înmulțirea matricelor. Să se determine matricile $B$ și $C$ dacă.

a) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**63.** Să se rezolve în corpul $\mathbb{Z}_{37}$ ecuația $x^2 + \hat{35}x + \hat{35} = \hat{0}$

**64.** Să se arate că grupul $(\mathbb{Q}, +)$ nu este izomorf cu nici un subgrup propriu al său.

**65.** Să se arate că un inel $A$ cu proprietatea că

$$(x^2 - x) \cdot y = y \cdot (x^2 - x), \ (\forall)\ x, y \in A$$

este comutativ.

**66.** Fie $A$ un inel unitar comutativ. Se consideră următoarele două afirmații.

a) $(\exists)\ a \in A$, unic, astfel încît $a^2 = -1$.

b) $1 + 1 = 0$ și $(\forall)\ a \in A\ (\exists)\ b \in A$ astfel ca $a = b^2$. Să se arate că dacă $A$ este finit atunci afirmațiile a) și b) sînt echivalente. Este adevărat acest rezultat în inelul $\mathbb{Z}_2[X] = A$ ?

**67.** Fie $(G, \cdot)$ un grup și $M \subset G$, $M \neq \Phi$, $M \neq G$. Să se arate că pentru orice $a \in G$, există $b \in G$ astfel încît $a \notin \{by \mid y \in M\}$.

**68.** Fie $(G,)$ un grup așa încît

$$(\forall)\ x, y, z \in G, \qquad xy^2 = z^2x \Rightarrow y = z.$$

Să se arate că

a) $x^2 \neq e$, $(\forall)\ x \in G - \{e\}$.

b) $(G, \cdot)$ este comutativ.

c) Orice grup cu proprietățile a) și b) are și proprietatea din enunț.

**69.** Spunem că un șir de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $(p)$ dacă $(a_n, a_m) = a_{(n,m)}$, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*$. Spunem că un șir de numere naturale $(b_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $(q)$ dacă $(b_n, b_m) = 1$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n$ nu divide $m$ și $m$ nu divide $n$. Să se demonstreze că

a) Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $(p)$ și $a_n \neq a_m$ pentru $n \neq m$ atunci avem echivalența $a_n | a_m \Leftrightarrow n | m$.

b) Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $(p)$, există un unic șir de numere raționale $(b_n)_{n \geq 1}$ astfel încît

$$a_n = \prod_{d | n} b_d, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

În plus, dacă $(b_n)_{n \geq 1}$ obținut este un șir de numere naturale, el are proprietatea $(q)$.

c) Dacă șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $(q)$, atunci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \prod_{d | n} b_d$ are proprietatea $(p)$.

**70.** Spunem că un șir de mulțimi $(G_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $(p)$ dacă $G_n \cap \bigcap G_m = G_{(n,m)}$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Spunem că un şir de mulţimi $(H_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea $(q)$ dacă $H_n \cap H_m = \Phi$ pentru orice, $n, m \in \mathbf{N}^*$, $n \neq m$.

Să se demonstreze că

a) Dacă $(G_n)_{(n\geq 1)}$ are proprietatea $(p)$ şi $G_n \neq G_m$ pentru $n \neq m$, avem echivalenţa $G_n \subset G_m \Leftrightarrow n \mid m$.

b) Dacă $(G_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea $(p)$, există un unic şir $(H_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea $(q)$ astfel încît $G_n = \bigcup_{d\mid n} H_d$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Dacă $(H_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea $(q)$, atunci şirul $(G_n)_{n\geq 1}$ definit prin $G_n = \bigcup_{d\mid n} H_d$ are proprietatea $(p)$.

d) Dacă $(G_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea $(p)$ şi $|G_n| = n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $|H_n| = \varphi(n)$ $(\forall)$ $n \in \mathbf{N}^*$, unde $(H_n)_{n\geq 1}$ este şirul cu proprietatea $(q)$ corespunzător lui $(G_n)_{n\geq 1}$, iar $\varphi$ este indicatorul lui Euler.

e) Şirul $(\overline{G}_n)_{n\geq 1}$ definit prin $\overline{G}_n = \{\alpha \in \mathbf{C} \mid \alpha^n = 1\}$ are proprietatea $(p)$, iar şirul $(\overline{H}_n)_{n\geq 1}$ corespunzător cu proprietatea $(q)$ este definit prin

$\overline{H}_n = \{\alpha \in \mathbf{C} \mid \alpha^n = 1$ şi $n$ este minim cu această proprietate$\}$.

f) Există egalitatea polinomială $X^n - 1 = \prod_{d\mid n} \Phi_d(X)$, unde se notează $\Phi_n(X) = \prod_{\alpha \in \overline{H}_n} (X - \alpha)$.

**71.** Să se determine $m \in \mathbf{Z}$ astfel încît ecuaţia

$$x^4 - 10x^3 - (m + 1)x^2 + m = 0$$

să admită o rădăcină întreagă şi, în acest caz, să se determine toate rădăcinile ecuaţiei.

**72.** Să se determine $m \in \mathbf{Z}$ astfel încît ecuaţia

$$\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{y^2 - 2}{y} = m$$

să admită soluţii întregi şi apoi să se rezolve.

**73.** Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{Z}$ astfel încît ecuaţia

$$2x^2 + 2y^2 - 5xy + (2 + m)x - (2m + 1)y + m - 5 = 0$$

să admită soluţii întregi şi să se determine toate soluţiile.

**74.** Se consideră funcţia

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{mx^2 + p}{x^2 + m},\ m \in \mathbf{R}_+^*,\ p \in \mathbf{R}.$$

Să se determine $Im\ (f)$.

**75.** Să se cerceteze injectivitatea funcţiei:

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ dacă } x \leq 0, \\ x + 1 \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$

**76.** Să se cerceteze injectivitatea funcției:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

**77.** Să se cerceteze surjectivitatea funcției:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x - 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

**78.** Să se cerceteze surjectivitatea funcției:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x + 1 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

**79.** Să se cerceteze inversabilitatea funcției:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 1 - x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

**80.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $|2x - 1| + |x - 3| = 4$
b) $|x - 1| = |2x + 3|$
c) $|x + 2| + 2x = a - 1$

**81.** Să se rezolve ecuația

$$|x - 1| + |y - 2| = 2$$

**82.** Să se rezolve ecuația

$$[2x + 1] + [3 - x] = 4$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $a$.

**83.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{3x - 2} = 6$
b) $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt{2x + 4} = 3$
c) $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{x + 11} = 10$

**84.** Fie $x_1$, $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2 - x + 1 = 0$. Să se determine ecuația cu coeficienți întregi, de grad minim, care are o rădăcină

$$z = \frac{x_1 + 1}{x_2 - 1}$$

**85.** Să se rezolve ecuația.

$$x^3 + x^2(\cos^2\alpha - 2) - x\sin^2\alpha + 2 - 3\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 0.$$ ***

**86.** Să se determine $m \in \mathbf{R} - \{1\}$ astfel încît ecuația:

$$(m - 1)^2x^2 - (2m^2 - m - 1)x + m(m + 1) = 0$$

să aibă cel puțin o rădăcină întreagă.

**87.** Fie $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 3 + 4i$. Să se determine $z \in \mathbf{C}$ astfel încît punctele de afixe $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z$ să formeze un paralelogram.

**88.** Să se arate că $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 10$, restul împărțirii polinomului

$$f = X^{7n+3} + X^{7n+1} - X^{69} + X^{50} + X^3 + X + 1$$

la $g = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ este $r = X^5 + X^4 + 3X^3 + X^2 + 4X + 2$.

**89.** Fie $x_k$, $k = \overline{1, 6}$, rădăcinile polinomului $f = X^6 + X^5 + X^4 - X^3 + 1$. Pentru fiecare $k = \overline{1, 6}$, să se determine polinomul $g_k \in \mathbf{Q}[X]$ de grad minim care admite pe $y_k = x_k^4 + x_k$, ca rădăcină.

**90.** Fie $f = X^6 - 2 \in \mathbf{Q}[X]$, $x = \sqrt[6]{2}$ o rădăcină a lui $f$ și să considerăm $h = X^3 \in \mathbf{Q}[X]$. Să se determine polinoamele $g \in \mathbf{Q}[X]$, de grad cel mult 6, care admit rădăcina $y = h(x)$.

**91.** Fie $x$ o rădăcină a polinomului $X^3 - X + 1$. Să se determine un polinom cu coeficienți în $\mathbf{Z}$ care admite pe $x^6$ ca rădăcină.

**92.** Fie $x_1$, $x_2$, $x_3$ rădăcinile ecuației $x^3 - 1 = 0$ și $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ rădăcinile ecuației $y^4 - 2 = 0$. Să se determine o ecuație cu coeficienți întregi care admite rădăcina $\frac{1}{x_1} + y_4^2$.

**93.** Să se determine restul împărțirii polinomului

$$f = X^{4n+3} + X^{4n+1} + X^{65} + X^{44} + X^3 + X - 1 \text{ la } h = X^3 + X^2 + X + 1.$$

**94.** Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir cu proprietatea că

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 5n^2 + 3,\ (\forall)\ n \geqslant 1.$$

a) Să se determine termenul general al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

b) Este $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică?

**95.** Există valori $m$, $n \in \mathbf{R}$ astfel încît polinomul

$$f = X^4 + 4X^3 + mX^2 - 12X + n$$

să fie pătratul altui polinom?

**96.** Să se arate că $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nu pot fi termeni într-o progresie aritmetică

**97.** Să se arate că $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} \notin \mathbf{Q}$.

**98.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $C_{89-4x^2}^{6x-1} = C_{29x}^{4x+2}$

b) $C_n^6 = 40 \cdot C_{n-1}^3$

**99.** Să se calculeze suma

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!}$$

**100.** Fie $x$ o rădăcină a ecuației $x^3 - x - 3 = 0$. Să se determine o ecuație de gradul al treilea, cu coeficienți întregi, care să aibă o rădăcină $y = x^6 - 3x + 2$.

**101.** Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $A^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

**102.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $A^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

**103.** Să se determine permutările $x \in S_4$ astfel ca $x\sigma = \tau x$ unde

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**104.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 2+i & 1-i \end{pmatrix}$ Să se calculeze $A^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

**105.** Fie $A = (a_{ij})$, $A \in M_n(\mathbf{C})$. Notăm $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$. Să se arate că:

a) $det\ \overline{A} = \overline{det\ A}$

b) $det\ (A \cdot \overline{A}) \geqslant 0$.

**106.** Fie $x_1, x_2, \ldots, x_5$ rădăcinile polinomului $X^5 - 2x - 2$ și $\sigma \in S_5$ o permutare oarecare. Să se calculeze

$$S = \sum_{k=1}^{5} \left( x_{\sigma(k)} + \frac{1}{x_{\sigma(k)}} \right)^2$$

**107.** Fie $x_1, x_2, x_3$ rădăcinile polinomului $X^3 - 7X^2 + 8X - 5$ și $\sigma \in S_3$ o permutare arbitrară de gradul 3. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} & x_{\sigma(3)} \\ x_{\sigma(2)} & x_{\sigma(3)} & x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(3)} & x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)} \end{vmatrix}$$

**108.** Să se rezolve:

a) $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{1} \\ \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{2} \end{cases}$ în $\mathbf{Z}_7$.

b) $\begin{cases} x + y + \hat{3}z = \hat{1} \\ \hat{2}x + z = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{4} \end{cases}$ în $\mathbf{Z}_5$.

**109.** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{3} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases} \text{ în } \mathbf{Z}_5.$$

**110.** Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix} A \in M_2(\mathbf{Z}_6)$. Să se calculeze $A^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

**111.** Să se rezolve în $\mathbf{Z}_{39}$ ecuațiile:

a) $\hat{2}x + \hat{4} = \hat{5}$

b) $\hat{3}x + \hat{1} = \hat{4}x + \hat{2}$

**112.** Să se cerceteze dacă polinomul

$$f \in \mathbf{Z}_3[X], \quad f = \hat{2}X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$$

este ireductibil.

**113.** Să se cerceteze dacă polinomul

$$f \in \mathbf{Z}_4[X], \qquad f = X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 + a$$

se poate descompune în produsul a două polinoame de grad $< 4$.

**114.** Să se demonstreze că polinomul $P(X) = (X-1)^2(X-2)^2 + 1$ nu se poate descompune în produsul a două polinome cu coeficienți întregi.

**115.** Fie polinomul $P = 6X^5 + 5X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 5X + 6 \in \mathbf{C}[X]$. Să se descompună $P$ în factori ireductibili peste:

a) $\mathbf{Q}$; b) $\mathbf{R}$; c) $\mathbf{C}$.

**116.** Considerăm polinomul cu coeficienți reali

$$P = X^{2n} + X^{n+1} - X^n + X^4 + X^3 + 1$$

Să se determine restul împărțirii lui $P$ prin $X^2(X-1)^2$.

**117.** Fie $A$ un inel în care $(\forall)\ x \in A$ cu $x^2 = 0$ avem $x = 0$. Dacă $x_1, x_2, x_3$ sînt elemente ale inelului $A$ astfel încît $x_1 x_2 x_3 = 0$ atunci

$$x_2 x_3 x_1 = 0,\ x_3 x_1 x_2 = 0,\ x_1 a x_2 b x_3 = 0,\ (\forall)\ a, b \in A.$$

**118.** Fie $a, b \in \mathbf{Z}$, $(a, b) = 1$, $m, n \in \mathbf{Z}$ și $d = (m, n)$. Atunci

$$(a^n - b^n, a^m - b^m) = a^d - b^d$$

unde $(x, y)$ reprezintă c.m.m.d.c. $(x, y)$.

**119.** Fie $G = (1, 2) \subset \mathbf{R}$ și operația

$$x * y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5},\ (\forall)\ x, y \in G.$$

Să se arate că $*$ este lege de compoziție pe $G$.

**120.** Poate fi descompus polinomul $f = X^4 + \hat{4}X^3 + X + \hat{2} \in \mathbf{Z}_6[X]$, în produsul a două polinoame de grad mai mic strict decît 4?

**121.** Fie $x_1, x_2, x_3$ rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ și $\sigma \in S_3$ o permutare oarecare de gradul trei. Să se calculeze valoarea determinantului.

$$D = \begin{vmatrix} x_{\sigma(1)}^2 & x_{\sigma(2)} & x_{\sigma(3)} \\ x_{\sigma(2)} & x_{\sigma(3)}^2 & x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(3)} & x_{\sigma(1)} & x_{\sigma(2)}^2 \end{vmatrix}$$

**122.** Să se determine termenii generali ai șirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ care satisfac relațiile

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + b_n, \quad (\forall)\ n \geq 1 \\ b_{n+1} &= -a_n + b_n, \quad (\forall)\ n \geq 1 \end{aligned}$$

și $a_1 = 1$, $b_1 = -2$.

**123.** Să se rezolve în $M_2(\mathbf{Z}_3)$ ecuația

$$X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

**124.** Să se determine $X \in M_{2,3}(\mathbf{Z}_4)$ astfel încît

$$\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}$$

**125.** Să se calculeze inversa matricei $A \in M_3(\mathbf{Z}_5)$ unde

$$A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{4} & \hat{2} \end{pmatrix}$$

**126.** Să se cerceteze inversabilitatea matricei $A \in M_3(\mathbf{Z}_4)$ unde

$$A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}$$

și, în caz afirmativ, să se calculeze $A^{-1}$.

**127.** Să se discute și să se rezolve în corpul $\mathbf{Z}_5$ sistemul

$$\begin{cases} mx + y + z = \hat{1} \\ x + my + z = \hat{2} \\ x + y + mz = \hat{3} \end{cases}$$

**128.** Fie $f = \hat{4}X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3} \in \mathbf{Z}_6[X]$. Să se arate că $f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_6$ și că $f$ se poate descompune în produsul a două polinoame, din care unul de gradul întîi.

**129.** Fie $f = \hat{6}X^2 + \hat{4}X + \hat{7} \in \mathbf{Z}_8[X]$. Este $f$ inversabil? (Spunem că $f$ este inversabil dacă există $g \in \mathbf{Z}_8[X]$ astfel ca $f \cdot g = 1$). Dacă da, care este inversul lui $f$?

**130.** Există polinom $f \in \mathbf{Z}_6[X]$ care să fie produsul a trei polinoame de gradul întîi, care să nu aibă rădăcini în $\mathbf{Z}_6$, astfel încît $f$ să aibă cel puțin o rădăcină în $\mathbf{Z}_6$?

**131.** Să se rezolve în $\mathbf{Z}_7$ sistemul

$$\begin{aligned} x + y + z &= \hat{1} \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \hat{2} \\ x^3 + y^3 + z^3 &= \hat{1} \end{aligned}$$

**132.** Se poate aplica algoritmul de împărţire a polinoamelor pentru

$f, g \in \mathbf{Z}_6[X]$, $f = \hat{4}X^4 + \hat{5}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$, $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$?

Puteţi determina $h, r \in \mathbf{Z}_6[X]$ astfel ca $f = gh + r$, grad $r <$ grad $g$?

Dacă da, este unică această scriere?

# SOLUȚII

**1.** Notînd $\sqrt[n]{2} = x$ avem $6\sqrt[n]{4} - 11\sqrt[n]{2} + 8 = 6x^2 - 11x + 3 = (2x - 3)(3x - 1) = (2\sqrt[n]{2} - 3)(3\sqrt[n]{2} - 1)$ și deci fracția devine $\frac{1}{(2\sqrt[n]{2} - 3)(3\sqrt[n]{2} - 1)} = \frac{1}{(2x - 3)(3x - 1)}$. Amplificăm cu $(2^{n-1}x^{n-1} + 2^{n-2}x^{n-2}3 + \ldots + 3^{n-1})(3^{n-1}x^{n-1} + \ldots + 1)$ și obținem numitorul $(2^n x^n - 3^n)(3^n x^n - 1) = (2^n 2 - 3^n)(3^n 2 - 1)$.

**2.** Vom da mai întîi următoarea

Lemă: Dacă $x, y \in \mathbf{Z}$, $a, b \in [0,1)$ atunci

$$x + a = y + b \Leftrightarrow x = y \text{ și } a = b$$

Demonstrație. „$\Leftarrow$" este evidentă.

„$\Rightarrow$" Presupunem că $x \neq y$ și aleg $x > y \Rightarrow x - y > 0$ și din $x, y \in \mathbf{Z} \Rightarrow x - y \geqslant 1$. Din $a \in [0, 1) \Rightarrow -1 < -a \leqslant 0$ și cum $0 \leqslant b < 1$ rezultă $-1 < b - a < 1$. Avem $x + a = y + b \Rightarrow x - y = b - a$ relație imposibilă deoarece membrul stîng este întreg mai mare sau egal cu 1, iar membrul drept număr real în intervalul $(-1, 1)$. Deci $x = y$ și din $x + a = y + b \Rightarrow a = b$ ceea ce încheie demonstrația lemei.

$$\text{Avem } (x) = \begin{cases} [x] \text{ dacă } \{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ [x] + 1 \text{ dacă } \{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real $x$.

Caz 1. $\{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Ecuația devine $5[x] + 2[x] = \frac{25}{3} - x$. Din $x = [x] + \{x\}$ avem $7[x] + [x] + \{x\} = \frac{25}{8} \Rightarrow 8[x] + \{x\} = 8 +$

$\frac{1}{3}$ și din Lemă avem $8[x] = 8$ și $\{x\} = \frac{1}{3} \Rightarrow [x] = 1$ și $\{x\} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

Caz 2. $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Avem $5[x] + 2[x] + 2 = \frac{25}{3} - x \Rightarrow 8[x] + \{x\} = \frac{25}{3} - 2 \Rightarrow 8[x] + \{x\} = 6 + \frac{1}{3}$ și din Lemă $8[x] = 6 \Rightarrow [x] = \frac{3}{4} \notin \mathbf{Z}$.

Deci soluție a ecuației $x = \frac{4}{3}$.

**3.** Reamintim că ecuațiile diofantice $ax + by = c$, cu $a, b, c, \in \mathbf{Z}$ admit. cel puțin o soluție dacă și numai dacă $(a, b) \mid c$, unde $(a, b) = c.m.m.d.c$ $(a, b)$. În cazul nostru $(7,2) = 1 \mid 3$ și deci ecuația admite cel puțin o soluție care se determina folosind algoritmul lui Euclid. Avem $7 = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 1 = 7 \cdot 1 + 2(-3) \Rightarrow 3 = 7 \cdot 3 + 2(-9)$ și deci o soluție particulară este $x_0 = 3$, $y_0 = -9$. Avem sistemul $7x + 2y = 3$ și $7 \cdot 3 + 2(-9) = 3$ de unde prin scădere avem $7(x - 3) + 2(y + 9) = 0 \Rightarrow 2(y + 9) + 7(3 - x) \Rightarrow 2/7(3 - x)$ și deoarece $(2, 7) = 1 \Rightarrow 2 \mid (3 - x) \Rightarrow 3 - x = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ și înlocuind avem $7(3 - 2k) + 2y = 3$, de unde $y = 7k - 9$, $k \in \mathbf{Z}$.

Deci soluție: $x = 3 - 2k$, $y = 7k - 9$, $k \in \mathbf{Z}$.

**4.** Presupunem că $x = \sin 1^\circ + \cos 1^\circ \in \mathbf{Q} \Rightarrow x^2 = \sin^2 1^\circ + 2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1 + \sin 2^\circ \Rightarrow \sin 2^\circ = x^2 - 1 \in \mathbf{Q}$. Din $\cos 4^\circ = 1 - 2 \sin^2 2^\circ \Rightarrow \cos 4^\circ \in \mathbf{Q}$. Folosind formula $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ pentru $\alpha = 4^\circ$, $\alpha = 12^\circ$ rezultă $\cos 36^\circ \in \mathbf{Q}$, (1). Calculăm acum $\cos 36^\circ$. Din $\sin 72^\circ = \sin (180^\circ - 72^\circ) = \sin 108^\circ \Rightarrow \sin 2 \cdot 36^\circ = \sin 3 \cdot 36^\circ \Rightarrow 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ (3 - 4 \sin^2 36^\circ)$ și deoarece evident $\sin 36^\circ \neq 0$, rezultă $2 \cos 36^\circ = 3 - 4(1 - \cos^2 36^\circ) \Rightarrow 4 \cos^2 36^\circ - 2 \cos 36^\circ - 1 = 0 \Rightarrow \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \notin \mathbf{Q}$ ceea ce este în contradicție cu (1).

**5.** Fie $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = f(x) + 2f(1 - x) - |x + 1|$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție bijectivă. Atunci demonstrăm că

$$F(x) = 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (Fog)(x) = 0, (\forall)\, x \in \mathbf{R}$$

„$\Rightarrow$" Fie $x \in \mathbf{R}$ arbitrar. Din $g$ bijecție rezultă că $(\exists)\, x \in \mathbf{R}$ astfel încît $x = g^{-1}(x')$ și deci $(Fog)(x) = (Fog)(g^{-1})(x')) = F(x')$ și deoarece $F(y) = 0$, $(\forall)\, y \in \mathbf{R} \Rightarrow F(x') = 0$ și deci $(Fog)(x) = 0$. Cum $x$ a fost arbitrar $\Rightarrow (Fog)(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. „$\Leftarrow$" Fie $x \in \mathbf{R}$ arbitrar. Din $g$ bijecție rezultă că $(\exists)\, x' \in R$ astfel încît $x = g(x')$. Avem $F(x) = F(g(x^1)) = (Fog)(x')$ și din $(Fog)(y) = 0$, $(\forall)\, y \in R \Rightarrow (Fog)(x') = \Rightarrow F(x) = 0$. Cum $x \in \mathbf{R}$ a fost arbitrar rezultă că $F(x) = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$. Fie, deci, $F(x) = f(x) + 2f(1 - x) - |x + 1| = 0$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$, (1) Considerăm $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1 - x$. Evident $g$ este bi-

jecție și deci $(Fog)(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ adică $f(g(x)) + 2f(1 - g(x)) - |g(x) + 1| = 0 \Rightarrow f(1 - x) + 2f(x) - |2 - x| = 0$, (2). Rezolvăm sistemul format din ecuațiile (1) și (2) în necunoscuta $f(x)$. Avem

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1 - x) = |x + 1| \\ 2f(x) + f(1 - x) = |2 - x| \end{cases}$$

de unde $-3f(x) = |x+ 1| - 2|2 - x|$ și obținem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5 - x}{3} \text{ dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 1 - x \text{ dacă } x \in [-1, 2] \\ \dfrac{x - 5}{3} \text{ dacă } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Reprezentarea grafică a acestei funcții o lăsăm ca exercițiu.

**6.** Se știe că formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea cu coeficienți complecși este aceeași cu formula de rezolvare a ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali. Avem $z_{1,2} = \dfrac{(1 - i) \pm t}{2}$, (1), unde $t^2 = (i - 1)^2 - 4(i + 2) = -8 - 6i$. Fie $t = x + iy \Rightarrow t^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ și deci $x^2 - y^2 = -8$ și $2xy = -6$. Rezolvînd acest ultim sistem se obțin soluțiile $(x_1 = 1,\ y_1 = -3)$ și $(x_2 = -1,\ y_2 = 3)$ $t_1 = 1 - 3i$ și $t_2 = -1 + 3i$. Înlocuim în (1) pe $t_1$ sau pe $t_2$. Obținem $z_1 = i$ și $z_2 = 1 - 2i$.

**7.** Din $[f(x)] = [g(x)] = k \in \mathbf{Z}$ avem $k \leqslant f(x) < k + 1$ și $k \leqslant g(x) < k + 1 \Rightarrow k \leqslant f(x) < k + 1$ și $-k - 1 < -g(x) \leqslant -k$ și prin adunare obținem $-1 < f(x) - g(x) < 1$. Deci condiția necesară pentru existența soluției este $|f(x) - g(x)| < 1$. În cazul problemei noastre avem $f(x) = x^2 - 2x + 3$ și $g(x) = x + 2$. Deci $|x^2 - 2x + 3 - x - 2| < 1 \Leftrightarrow |x^2 - 3x + 1| < 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 < 1 \\ x^2 - 3x + 1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2 - 3x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{matrix}$$

Rezolvînd sistemul se obține $x \in (0, 1) \cup (2, 3)$.

Pentru $x \in (0,1) \Rightarrow x + 2 \in (2,3) \Rightarrow [x + 2] = 2 \Rightarrow [x^2 - 2x + 3] = 2$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 3 \in [2,3) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 \geqslant 2 \\ x^2 - 2x + 3 < 3 \end{cases}$$

Se obține $x \in (0,2)$ și din $x \in (0,1)$ avem $x \in (0,1)$, (1)

Pentru $x \in (2,3) \Rightarrow x + 2 \in (4,5) \Rightarrow [x + 2] = 4 \Rightarrow [x^2 - 2x + 3] = 4$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 3 \in [4,5) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 \geqslant 4 \\ x^2 - 2x + 3 < 5 \end{cases}$$

Se obține $x \in (1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3})$ și din $x \in (2,3)$

avem $x \in [1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3})$, (2).

Din (1) și (2 obținem soluția $x \in (0,1) \cup [1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{3})$

8. Avem $x^2+x^2+y^2+y^2+z^2-2xy-2xz-4y+4-3=0 \Rightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-2)^2=3$ și deoarece membrul stîng este format din numere întregi pozitive și $x \neq y$ și $x \neq z$ avem $(x-y)^2 \in \{1,2,3\}$, $(x-z)^2 \in \{1,2,3\}$, $(y-2)^2 \in \{0,1,2,3\}$. Dacă una din parantezele membrului stîng ar fi 3 atunci celelalte două ar fi zero, ceea ce este imposibil. Deci $(x-y)^2 \in \{1,2\}$, $(x-z)^2 \in \{1,2\}$, $(y-2)^2 \in \{0,1,2\}$.

Dacă $(x-y)^2=2 \Rightarrow x-y=\pm\sqrt{2}$ ceea ce este imposibil deoarece $x, y \in \mathbf{Z}$. Deci $(x-y)^2=1 \Rightarrow x-y=\pm 1 \Rightarrow x=y\pm 1$, (1)

Dacă $(x-z)^2=2 \Rightarrow x-z+\pm\sqrt{2}$ ceea ce este imposibil deoarece $y, z \in \mathbf{Z}$. Deci $(x-z)^2=1 \Rightarrow x-z=\pm 1 \Rightarrow z=x\pm 1$, (2)

Rezultă că în mod necesar, $(y-2)^2=1 \Rightarrow y=3$ sau $y=1$.

Caz 1. $y=3 \Rightarrow x=4$ sau $x=2$.

Din $x=4 \Rightarrow z=5$ sau $z=3$. Soluții posibile: a) $x=4$, $y=3$, $z=5$; b) $x=4$, $y=3$, $z=3$ care nu convine deoarece $x \neq y \neq z$.

Din $x=2 \Rightarrow z=3$ sau $z=1$. Soluții posibile: a) $x=2$, $y=3$, $z=3$ care nu convine; b) $x=2$, $y=3$, $z=1$.

Caz 2. $y=1 \Rightarrow x=2$ sau $x=0$.

Din $x=2 \Rightarrow z=3$ sau $z=1$. Soluții posibile: a) $x=2$, $y=1$, $z=1$ care nu convine; b) $x=2$, $y=1$, $z=3$.

Din $x=0 \Rightarrow z=1$ sau $z=-1$. Soluții posibile: a) $x=0$, $y=1$, $z=1$ care nu convine; b) $x=0$, $y=1$, $z=-1$.

Prin verificare directă obținem următoarele soluții $(x,y,z) \in \{(4,3,5), (2,3,1), (2,1,3), (0,1,-1)\}$.

9. Presupunem că $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ și avem $x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3} \Rightarrow (x-\sqrt{2})^3=3 \Rightarrow x^3-3\sqrt{2}x^2+6x-2\sqrt{2}=3 \Rightarrow \sqrt{2}(3x^2+2)=x^3+6x-3$, (1).

Deci $\sqrt{2}=\dfrac{x^3+6x-3}{3x^2+2}$ relația imposibilă, deoarece membrul stîng nu este rațional, iar membrul drept este rațional.

Obs. Dacă ridicăm la pătrat relația (1) se ajunge la

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$$

adică $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului

$$f=X^6-6X^4-6X^3+12X^2-36X+1 \in \mathbf{Z}[X]$$

Dar toate rădăcinile raționale alui lui $f$ pot fi 1 sau $-1$, care nu sînt rădăcini (verificare directă). Cum $x$ este rădăcină a lui $f$ rezultă $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

10. Evident $|A| \leq 100$. Să presupunem că două dintre elementele mulțimii $A$ ar fi egale, adică $(\exists)$, $n, m \in \{1,2,\ldots,100\}$, $n \neq m$ astfel încît $4n^2/(n+1)=4m^2/(m+1) \Rightarrow n^2m+n^2=m^2n+m^2 \Rightarrow (n-m)(nm+n+m)=0$ relație imposibilă deoarece $n \neq m$ și din $n,m \in$

$\in \{1,2,\ldots,100\}$ rezultă $nm + n + m > 0$. Deci presupunerea că mulțimea $A$ ar avea două elemente egale este falsă.

Rămîne că $|A| = 100$.

Evident $|B| \leq 100$. Procedăm analog $\frac{n^2 - n + 4}{n^2 + 1} = \frac{m^2 - m + 4}{m^2 + 1}$

și după calcule obținem $(n - m)(nm - 1 - 3n - 3m) = 0$.

Avem $nm - 1 - 3n - 3m = 0 \Rightarrow n(m - 3) = 3m = + 1$.

Dacă $m = 3 \Rightarrow 0 = 10$ ceea ce este absurd.

Dacă $m \neq 3$ avem $n = \frac{3m + 1}{m - 3} = \frac{3m - 9 + 10}{m - 3} = 3 + \frac{10}{m - 3}$ și

deoarece $n, m \in \mathbf{Z} \Rightarrow (m - 3) \mid 10 \Rightarrow m - 3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$.

1) $m - 3 = 1 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow n = 13$ și deci $y_4 = y_{13}$

2) $m - 3 = -1 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow n = -7 \notin \mathbf{N}^*$

3) $m - 3 = 2 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow n = 8$ și deci $y_5 = y_8$

4) $m - 3 = -2 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow n = -2 \notin \mathbf{N}^*$

5) $m - 3 = 5 \Rightarrow m = 8 \Rightarrow n = 5$ și am găsit din nou 3)

6) $m - 3 = -5 \Rightarrow m = -2 \notin \mathbf{N}^*$

7) $m - 3 = 10 \Rightarrow m = 13 \Rightarrow n = 4$ și am regăsit 1)

8) $m - 3 = -10 \Rightarrow m = -7 \notin \mathbf{N}^*$

În final $y_4 = y_{13}$ și $y_5 = y_7 \Rightarrow |B| = 98$.

11. Fie $p \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ și $k \in \mathbf{N}^*$, $k < 2p - 1$ fixați. Din $k < 2p - 1 \Rightarrow -k > -2p + 1 \Rightarrow p^2 - k > p^2 - 2p + 1 = (p - 1)^2 > 0$ și deci are sens $\sqrt{p^2 - k}$. Notăm $x_1 = p + \sqrt{p^2 - k}$ și $x_2 = p - \sqrt{p^2 - k} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2p$ și $x_1 x_2 = p^2 - p^2 + k = k \Rightarrow x_1, x_2$ sînt rădăcinile ecuației $x^2 - 2px + k = 0$. Avem $x_1^2 - 2px_1 + k = 0$ și $x_2^2 - 2px_2 + k = 0 \Rightarrow x_1^n - 2px_1^{n-1} + kx_1^{n-2} = 0$ și $x_2^n - 2px_2^{n-1} + kx_2^{n-2} = 0 \Rightarrow x_1^n + x_2^n = 2p(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - k(x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$, (1). Avem $x_1 + x_2 = 2p$ și $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4p^2 - 2k = 2(2p^2 - k)$ care este un număr par. Din $x_1 + x_2$ și $x_1^2 + x_2^2$ numere pare și relația (1) folosind inducția matematică se arată că $x_1^n + x_2^n$ este număr par, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, fie acesta $2m_n$. Deci $x_1^n + x_2^n = 2m_n$ (2)

Arătăm că $x_2 \in (0,1)$. Avem $x_2 > 0 \Leftrightarrow p - \sqrt{p^2 - k} > 0 \Leftrightarrow p > \sqrt{p^2 - k} \Leftrightarrow p^2 > p^2 - k$ ceea ce este evident. Avem $x_2 < 1 \Leftrightarrow p - \sqrt{p^2 - k} < 1 \Leftrightarrow p - 1 < \sqrt{p^2 - k} \Leftrightarrow p^2 - 2p + 1 < p^2 - k \Leftrightarrow 2p - 1 > k$ ceea ce este adevărat. Deci $x_2 \in (0,1) \Rightarrow x_2^n \in (0,1) \Rightarrow -x_2^n \in (-1, 0)$. Din (2) avem $x_1^n = 2m n - x_2^n \in (2m_n - 1, 2m_n)$ și rezultă $[x_1^n] = 2m_n - 1 \Rightarrow [(p + \sqrt{p^2 - k})^n] = 2m_n - 1$ adică impar.

Pentru $p = 45$ și $k = 50$ se obține problema dată la O.I.M.1975.

12. a) Fie $x_1$ rădăcină a ecuației $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1^3 - x_1^2 + 2x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1^3 = x_1^2 - 2x_1 - 1$, (1). Înmulțind cu $x_1$ ultima relație avem $x_1^4 = x_1^3 - 2x_1^2 - x_1 = x_1^2 - 2x_1 - 1 - 2x_1^2 - x_1$ și deci $x_1^4 = -x_1^2 - 3x_1 - 1$, (2). Înmulțind (2) cu $x_1$ avem $x_1^5 = -x_1^3 - 3x_1^2 - x_1 = -x_1^2 + 2x_1 + 1 - 3x_1^2 - x_1 = -4x_1^2 + x_1 + 1 \Rightarrow x_1^5 = -4x_1^2 + x_1 + 1$, (3)

Presupunem prin absurd că $x_1 \notin D \Rightarrow x_1^5 - 7x_1 + 2 = 0$.
Ţinînd seama şi de (3) avem $0 = x_1^5 - 7x_1 + 2 = -4x_1^2 + x_1 + 1 - 7x_1 + 2 = -4x_1^2 - 6x_1 + 3$. Rezolvînd ecuaţia de gradul al doilea, obţinută mai înainte, avem $x_1 = \frac{-3-\sqrt{21}}{4}$ sau $x_1 = \frac{-3+\sqrt{21}}{4}$

i se verifică că $x_1$ nu este soluţie a ecuaţiei $x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ ceea ce este în contradicţie cu faptul că $x_1$ este soluţie a acestei ecuaţii.
Rămîne că $x_1$ nu este rădăcină a ecuaţiei $x^5 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 \in D$.
Analog $x_2 \in D$ şi $x_3 \in D$.
b) Ţinînd seama de (1), (2) şi (3) avem

$$f(x_1) = \frac{-x_1^2 - 3x_1 - 1 - 3x_1^2 - 3x_1 + 4}{-4x_1^2 + x_1 + 1 - 7x_1 + 2} = \frac{-4x_1^2 - 6x_1 + 3}{-4x_1^2 - 6x_1 + 3} = 1$$

şi analog $f(x_2) = 1$. Deci $f(x_1) + f(x_2) = 2$.

**13.** Considerăm ecuaţia dată în necunoscuta $m$ şi parametrul $x$.
După calcule obţinem

$$(1 - 2x)m^2 + (x^2 + x - 1)m + x(x-1)^2 = 0, \quad (1)$$

Rezolvînd această ecuaţie avem discriminantul

$$\Delta = (x^2 + x - 1)^2 - 4(1 - 2x)(x-1)^2 x = 9x^4 - 18x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = (3x^2 - 3x + 1)^2 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-x^2 - x + 1 \pm (3x^2 - 3x + 1)}{2(1 - 2x)}$$

de unde avem $m_1 = x$ şi $m_2 = \frac{(x-1)^2}{1-2x}$, $x \neq \frac{1}{2}$. Deci $x_1 = m$ şi $x_{2,3}$ se determină din ecuaţia $m - \frac{x^2 - 2x + 1}{1 - 2x} = 0 \Rightarrow x^2 + 2(m-1)x + 1 - m = 0$ cu rădăcinile $x_{2,3} = 1 - m \pm \sqrt{m^2 - m}$, cu $m^2 - m \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Pentru $x = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. Pentru $m = \frac{1}{2}$ ecuaţia dată devine $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = \frac{1}{2}$ şi $x_{2,3} = \pm i \notin \mathbf{R}$.

Deci $m \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ şi $x_1 = m$, $x_{2,3} = 1 - m \pm \sqrt{m^2 - m}$.
Pentru a doua chestiune din $x_1 = m \Rightarrow m \in \mathbf{Z}$. Pentru ca $x_{2,3} \in \mathbf{Z}$ în mod necesar $m^2 - m = k^2, k \in \mathbf{Z}, \Rightarrow m^2 - m - k^2 = 0$ cu $\Delta_1 = 1 + 4k^2$. Deoarece şi $m \in \mathbf{Z} \Rightarrow 1 + 4k^2 = u^2$, $u \in \mathbf{Z}$ $1 = u^2 - 4k^2 = (u - 2k)(u + 2k)$. Avem două cazuri.
Caz 1. $u - 2k = 1$ şi $u + 2k = 1 \Rightarrow u = 1$ şi $k = 0 \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0$ sau $m = 1$.
Pentru $m = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$
Pentru $m = 1 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

Caz 2. $u - 2k = -1$ și $u + 2k = -1 \Rightarrow u = -1 \Rightarrow k = 0$
$m^2 - m = 0$ și se obțin aceleași soluții.

**14.** a) Reamintim că $M \subset \mathbf{R}$ este mulțime simetrică dacă $(\forall)x \in M \Rightarrow -x \in M$. Notăm $F(x) = f(x) + f^{-1}(x) - x$. Conform observației de al exercițiul 5 avem că $(\forall)g : M \to M$ bijecție este adevărat

$$F(x) = 0,\ (\forall)\ x \in M \Leftrightarrow F(g(x)) = 0,\ (\forall)\ x \in M$$

Fie deci $x \in M$ fixat. Avem $F(x) = 0 (\forall)\ x \in M$ și deoarece $f$ este bijecție $\Rightarrow F(f(x)) = 0,\ (\forall)\ x \in M \Rightarrow (fof)(x) + x - f(x) = 0$, (1) și din $F(x) = f(x) + f^{-1}(x) - x = 0$ avem $(fof)(x) + f^{-1}(x) = 0$. Notez $F_1(x) = (fof)(x) + f^{-1}(x) = 0,\ (\forall)\ x \in M$ și deci $F_1(f(x)) = 0 \Rightarrow (fofof)(x) + x = 0 \Rightarrow (fofof)(x) = -x$ și deoarece $fofof : M \to M \Rightarrow -x \in M$.

Deci din $x \in M \Rightarrow -x \in M \Rightarrow M$ este mulțime simetrică.

b) Fie $F_2(x) = (fofof)(x) + x = 0,\ (\forall)\ x \in M \Rightarrow F_2(f(x)) = 0 \Rightarrow (fofofof)(x) + f(x) = 0 \Rightarrow f(fofof(x)) = -f(x)$ și din $(fofof)(x) = -x$ rezultă $f(-x) = -f(x)$ și deci $f$ impară.

**15.** Fie $f$ o funcție cu proprietățile din enunț. Deoarece $f$ este surjecție $\Rightarrow (\exists)\ m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $f(m) = 1$. Din $g_f$ crescătoare $\Rightarrow g_f(m) \leq g_f(m+1) \Rightarrow \dfrac{m}{f(m)} \leq \dfrac{m+1}{f(m+1)} \Rightarrow m \leq \dfrac{m+1}{f(m+1)} \Rightarrow f(m+1) \leq 1 + \dfrac{1}{m} < 2 \Rightarrow f(m+1) \in \{1, 2\}$.

Dacă $f(m+1) = 1$ din $f(m) = 1$ și $f$ injecție $\Rightarrow m + 1 = m$ ceea ce este absurd. Deci $f(m+1) = 2$. Dar $f(m+1) \leq 1 + \dfrac{1}{m} \leq 2 \Rightarrow 2 = 1 + \dfrac{1}{m} \Rightarrow 2m = m + 1 \Rightarrow m = 1$. Deci $f(1) = 1$ și $f(2) = 2$. Arătăm prin inducție matematică $f(n) = n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Pentru $n = 1$ și $n = 2$ s-a demonstrat și deci propoziția este adevărată.

Presupunem că $(\forall) 2 \leq k \leq n, f(k) = k$ și demonstrăm cu $f(n+1) = n + 1$. Din $g_f$ crescătoare $\Rightarrow \dfrac{n}{f(n)} \leq \dfrac{n+1}{f(n+1)} \Rightarrow 1 \leq \dfrac{n+1}{f(n+1)} \Rightarrow f(n+1) \leq n + 1$. Dacă $f(n+1) < n + 1 \Rightarrow (\exists)\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît $f(n+1) = k = f(k)$ și din $f$ injecție $\Rightarrow n + 1 = k < n \Rightarrow n + 1 < n$ ceea ce este absurd.

Rămîne $f(n+1) = n + 1$. Deci $f(n) = n,\ (\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$.

Reciproc se veridică imediat că $f(n) = n$ verifică relația din enunț.

**16.** Notăm $S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_j}{z_k}$ și $T = \sum_{k=1}^{n} z_k$. Avem $S = \sum_{j=1}^{n} \left( z_j \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_k} \right) = \left( \sum_{j=1}^{n} z_j \right) \left( \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_k} \right) = T \cdot \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_k}$ și deci, $S = T \cdot \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_k}$, (1).

Din enunț avem $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = \rho \Rightarrow z_k\bar{z}_k = \rho^2 \Rightarrow \frac{1}{z_k} = \frac{\bar{z}}{\rho^2}$, $(\forall)\ k = \overline{1,n}$. Deci $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} = \frac{1}{\rho^2}\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k = \frac{1}{\rho^2}\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \frac{1}{\rho^2}\bar{T}$.

Am obținut $S = \frac{1}{\rho^2} T \cdot \bar{T} = \frac{1}{\rho^2}|T|^2 \in \mathbf{R}$.

„$\Rightarrow$" $Re(S) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho^2}|T|^2 = 0 \Rightarrow |T|^2 = 0 \Rightarrow T = 0$.

„$\Leftarrow$ "$T = 0 \Rightarrow |T|^2 = 0 \Rightarrow S = 0 \Rightarrow Re(S) = 0$.

**17.** Fie $g : [0, \frac{\pi}{4}] \to [0, \frac{\pi}{4}]$, $g(x) = x \sin 2x$. Avem că

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |g(x) - g(y)|,\ (\forall)\ x, y \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Pentru $x = \frac{\pi}{4}$ și $y = 0$ deducem că

$$|f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0)| \geqslant |g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g(0)| = \frac{\pi}{4},\ (1)$$

Din definiția funcției $f$ avem $0 \leqslant f(0) \leqslant \frac{\pi}{4}$ și $0 \leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{4} \leqslant -f(0) \leqslant 0$ și $0 \leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\pi}{4} \Rightarrow |f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0)| \leqslant \frac{\pi}{4}$, (2).

Din (1) și (2) deducem $|f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0)| = \frac{\pi}{4}$, (3). Din (3) avem

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ sau } f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = -\frac{\pi}{4}.$$

Caz 1. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + f(0)$ și din $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\pi}{4}$

rezultă $f(0) \leqslant 0$ și deoarece $f(0) \geqslant 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ și $f(0) = 0$.

Avem $|f(x)| = |f(x) - f(0)| \geqslant |g(x)| = |x \sin 2x| \Rightarrow f(x) \geqslant x \sin 2x$

și $|f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)| = |(f(x) - \frac{\pi}{4}| \geq |x \sin 2x - \frac{\pi}{4}| \Rightarrow \frac{\pi}{4} - f(x) \geq$

$\geqslant \frac{\pi}{4} - x \sin 2x \Rightarrow f(x) \leqslant x \sin 2x$ și deci $f(x) = x \sin 2x$.

Caz. 2. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}$ și din $f(0) \leqslant \frac{\pi}{4}$

rezultă $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$ și deoarece $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{\pi}{4}$.

Procedînd analog se obține $f(x) = \frac{\pi}{4} - x \sin 2x$.

**18.** Fie $a_k = p_1^{k1} p_1^{k2} \dots p_m^{km}$, (1), $k = \overline{1, m}$ descompunerea numerelor $a_1, a_2, \dots a_n$. Deoarece acestea sînt distincte rezultă că descompunerile sînt distincte. Numărul $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{p_1^k p_2^{k2} \dots p_m^{km}}$ este un factor și numai unul în produsul

$$\left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{t1}}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_2^{t2}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_m} + \dots + \frac{1}{p_m^{tm}}\right)$$

unde $t_1, t_2, \dots, t_m$ sînt cele mai mari puteri la care apar respectiv $p_1, p_2, \dots, p_m$. Avem

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{t1}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_m} + \dots + \frac{1}{p_m^{tm}}\right) =$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{p_1}\right)^{t1+1}}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{p_2}\right)^{t2+1}}{1 - \frac{1}{p_2}} \dots \frac{1 - \left(\frac{1}{p_m}\right)^{tm+1}}{1 - \frac{1}{p_m}} <$$

$$< \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \dots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_m}} = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \dots \frac{p_m}{p_m - 1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{p_k - 1}$$

**19.** Dacă $f$ este polinomială de grad $m$ atunci $fof$ este polinomială de grad $m^2$ și reciproc. Deoarece grad $fof = n^2 + n + n + 1 = (n + 1)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ grad $f = n + 1$. Deoarece $fof$ are cel mai mic grad $n^2 \Rightarrow f$ are cel mai mic grad $n$. Deci $f(x) = ax^{n+1} + bx^n$.
Deoarece $fof$ are coeficientul dominant 1 rezultă că $f$ are coeficientul dominant 1 și deci $f(x) = x^{n+1} + bx^n$. Deoarece $fof$ are coeficientul termenului de grad minim 1 $\Rightarrow f$ are aceeași proprietate $\Rightarrow f = x^{n+1} + x^n$. Se verifică că $f$ este soluție.

**20.** Fie $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$. $\varepsilon$ fiind rădăcină de ordinul $n$ a unității $\varepsilon^n = 1$. Avem $\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon^k) = f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + \dots$

$$\dots + f(\varepsilon^n) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} + a_n\varepsilon^n + a_0 + a_1\varepsilon^2 +$$

$$+ a_2\varepsilon^4 + \dots + a_{n-1}\varepsilon^{2(n-1)} + a_n\varepsilon^{2n} + \dots + a_0 + a_1\varepsilon^n + a_2\varepsilon^{2n} + \dots$$

$$\dots + a_n\varepsilon^{n \cdot n} = na_0 + a_1(\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^n) + a_2(\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \dots + \varepsilon^{2n}) +$$

$$+ \dots + a_{n-1}(\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{2(n-1)} + \dots + \varepsilon^{n(n-1)}) + na_n = na_0 + a_1\varepsilon\frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} +$$

$$+ a_2\varepsilon^2\frac{1 - \varepsilon^{2n}}{1 - \varepsilon^2} + \dots + a_n n = na_0 + a_n n = n(a_0 + a_n), \quad (1)$$

De asemenea $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{\varepsilon^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\frac{1}{\varepsilon^k}\right)^j = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^{kj}} = na_0 +$

$$+ a_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{1 - \frac{1}{\varepsilon}} + a_2 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2n}}{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} + \ldots + na_n = na_0 + na_n =$$

$n(a_0 + a_n)$, (2). Din (1) și (2) rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon^k) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{\varepsilon^k}\right) = n(a_0 + a_n) \in \mathbf{R}.$$

**21.** Din $a_0 \neq 0$ rezultă $x_k \neq 0$, $k = \overline{1,5}$. Notăm $S_n = \sum_{k=1}^{5} x_k^n$ și $T_n =$

$= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x_k^n}$ și punînd $y_k = \frac{1}{x_k}$ avem $T_n = \sum_{k=1}^{5} y_k^n$, unde $y_k$ sînt rădăcinile ecuației $a_0y^5 + a_1y^4 + a_2y^3 + a_3y^2 + a_4y + a_5 = 0$, (1).

Vom nota cu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ relațiile lui Viete atașate polinomului care a generat ecuația în $x$ și cu $v_1', \ldots, v_5'$ relațiile lui Viete atașate polinomului care a generat ecuația în $y$.

$x_k$, $k = \overline{1,5}$, fiind rădăcinile ecuației date avem

$$a_5x_k^5 + a_4x_k^4 + a_3x_k^3 + a_2x_k^2 + a_1x_k + a_0 = 0, \quad (2)$$

Din $x_k \neq 0$, $k = \overline{1,5}$, rezultă că putem împărți (2) cu $x_k$

$$a_5x_k^5 + a_4x_k^4 + a_3x_k^2 + a_2x_k + a_1 + \frac{a_0}{x_k} = 0$$

și sumînd după $k$ avem $a_5S_4 + a_4S_3 + a_3S_2 + a_2S_1 + 5a_1 + a_0T_1 = 0$, (3). Împărțind acum (2) la $x_k^2$ obținem

$$a_5x_k^3 + a_4x_k^2 + a_3x_k + a_2 + \frac{a_1}{x_k} + \frac{a_0}{x_k^2} = 0$$

și sumînd după $k$ avem $a_5S_3 + a_4S_2 + a_3S_1 + 5a_2 + a_1T_1 + a_0T_2 = 0$, (4). Din $S_1 = v_1$, $S_2 = v_1^2 - 2v_2$, $T_1 = v_1'$, $T_2 = v_1'^2 - 2v_2'$ și din (4) obținem $S_3$ și din (3) obținem $S_4$.

$y_k$, $k = \overline{1,5}$, fiind rădăcină a ecuației (1) avem

$$a_0y_k^5 + a_1y_k^4 + a_2y_k^3 + a_3y_k^2 + a_4y_k + a_5 = 0, \quad (5)$$

Împărțind (5) prin $y_k$ și sumînd după $k$ avem

$$a_0T_4 + a_1T_3 + a_2T_2 + a_3T_1 + 5a_4 + a_5S_1 = 0, \quad (6)$$

Împărțind acum (5) la $y_k^2$ și sumînd obținem

$$a_0T_3 + a_1T_2 + a_2T_1 + 5a_3 + a_4S_1 + a_5S_2 = 0, \quad (7)$$

Din $T_1 = v_1'$, $T_2 = v_1'^2 - 2v_2'$, $S_1 = v_1$, $S_2 = v_1^2 - 2v_2$ înlocuind în (7) se obține $T_3$ și din (6) se obține $T_4$.

**22.** Notăm $a = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}$ și $b = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$. Presupunem contrariul adică $a \geqslant b$ și ridicînd la puterea a treia avem

$$7 + 3\sqrt[3]{10} \cdot a \geqslant 7 + 3\sqrt[3]{12} \cdot b \Rightarrow \frac{a}{b} \geqslant \sqrt[3]{\frac{6}{5}} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 \geqslant \frac{6}{5}.$$

Afirm că $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \geqslant \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$. Demonstrăm prin inducție matematică. Pentru $n = 0$ s-a demonstrat. Presupunem

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 \geqslant \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$ și demonstrăm că $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \geqslant \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3^{n+2}-1}{2}}$

Pentru comoditate vom demonstra că $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \geqslant \left(\frac{6}{5}\right)^m \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 \geqslant \left(\frac{6}{5}\right)^{3m+1}$

Avem $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \geqslant \left(\frac{6}{5}\right)^m \Rightarrow 5^m a^3 \geqslant 6^m b^3 \Rightarrow 5^m (\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})^3 \geqslant 6^m (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4})^3 \Rightarrow 5^m (7 + 3\sqrt[3]{10} \cdot a) \geqslant 6^m (7 + 3\sqrt[3]{12} \cdot b) \Rightarrow 3(5^m \sqrt[3]{10} \cdot a - 6^m \sqrt[3]{12} \cdot b) \geqslant 7(6^m - 5^m) > 0 \Rightarrow 5^m \sqrt[3]{10} \cdot a > 6^m \sqrt[3]{12}\, b \Rightarrow 5^{3m} 10 \cdot a^3 > 6^{3m} 12 \cdot b^3 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} > \frac{6^{3m} 12}{5^{3m} 10} = \left(\frac{6}{5}\right)^{3m+1}$. Luînd acum $m = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ rezultă aserțiunea.

Dar relația $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \geqslant \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}$ este imposibilă deoarece limita șirului din membrul drept este $+\infty$ și deci $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \infty$ ceea ce este absurd. Deci presupunerea făcută este falsă. Rămîne că $a < b$ adică $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$.

**23.** La început supunem atenției cititorului trei observații.

Obs. 1. Dacă $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $A, B, C \subseteq \mathbf{R}$, sînt două funcții strict monotone, de aceeași monotonie, atunci $gof$ este strict crescătoare.

Demonstrație. Fie $f$, $g$ strict crescătoare și fie $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$. Avem $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Rightarrow (gof)(x_1) < (gof(x_2)$ și deci este strict crescătoare.

Fie $f$, $g$ strict descrescătoare și fie $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$. Avem $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Rightarrow (gof)(x_1) < (gof)(x_2)$
și deci $gof$ este strict crescătoare.

Obs. 2. Dacă $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, $A, B, C \subseteq \mathbf{R}$, sînt două funcții strict monotone, de monotonii diferite, atunci $gof$ este strict descrescătoare.

Demonstrație. Fie $f$ strict crescătoare și $g$ strict descrescătoare și fie $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in A$. Avem $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \Rightarrow (gof)(x_1) > (gof)(x_2) \Rightarrow gof$ este strict descrescătoare. Analog dacă $f$ este strict descrescătoare și $g$ este strict crescătoare.

Obs. 3. Dacă $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, este o funcție strict crescătoare (strict descrescătoare) atunci $-f$ este strict descrescătoare (strict crescăroare).

Demonstrația o lăsăm ca exercițiu.

Obs. 4. Dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, sînt două funcții strict monotone, de monotonii diferite, atunci ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluție.

Demonstrație. Alegem $f$ strict crescătoare și $g$ strict descrescătoare. Atunci $-g$ este strict crescătoare $\Rightarrow f - g$ este strict crescătoare $\Rightarrow$ $\Rightarrow f - g$ este injectivă $\Rightarrow$ ecuația $f(x) - g(x) = 0$ are cel mult o soluție.

Trecem acum la rezolvarea exercițiului.

a) Considerăm $f(x) = \log_3 x$, $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ și $g(x) = 2^x$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$. Evident $f$ și $g$ sînt strict crescătoare și din Obs. 1 rezultă că $gof$ este strict crescătoare. Funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = -x + 2$ este strict descrescătoare. Conform Obs. 4 ecuația $(gof)(x) = h(x)$, adică $2^{\log_3 x} = -x + 2$ are cel mult o soluție. Se verifică imediat că $x = 1$ este soluție.

b) Considerăm $f(x) = \log_3 x$, $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, și $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$. Evident $f$ este strict crescătoare și $g$ este strict descrescătoare. Conform Obs. 2 $gof$ este strict descrescătoare. Funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = x$ este strict crescătoare. Conform Obs. 4 ecuația $(gof)(x) = h(x)$ adică $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = x$ are cel mult o soluție. Se verifică ușor că $x = 1$ este soluție.

**24.** a) Condiția de existență a logaritmului este $3^n - 5 > 0 \Leftrightarrow$ $3^n > 5 > 3 \Rightarrow n > 1$ și din $n \in \mathbf{N} \Rightarrow n \geqslant 2$, (1), $\Rightarrow 3^n \geqslant 3^2 \Rightarrow 3^n \geqslant 9$ $\Rightarrow 3^n - 5 \geqslant 9 - 5 \Rightarrow 3^n - 5 \geqslant 4 \Rightarrow \log_2(3^n - 5) \geqslant \log_2 4 = 2$.
Din $\log_2(3^n - 5) \geqslant 2 \Rightarrow 6 - 2^n \geqslant 2 \Rightarrow 2^n \leqslant 4 \Rightarrow 2^n \leqslant 2^2 \Rightarrow n \leqslant 2$, (2)
Din (1) și (2) rezultă că, în mod necesar $n = 2$. Se verifică că $n = 2$ este soluție.

b) Fie $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = \log_3(2^x + 1)$. Arătăm că $f$ este bijectivă. Din $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $\log_3(2^{x_1} + 1) = \log_3(2^{x_2} + 1) \Rightarrow 2^{x_1} + 1 = 2^{x_2} + 1 \Rightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ și deci $f$ este injectivă. Fie $y \in (0, +\infty)$. Avem $f(x) = y \Leftrightarrow \log_3(2^x + 1) = y \Leftrightarrow 2^x + 1 = 3^y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^x = 3^y - 1$, (1). Din $y > 0 \Rightarrow 3^y > 1 \Rightarrow$
$3^y - 1 > 0$ și deci are sens $\log_2(3^y - 1)$. Din (1) avem $x = \log_2(3^y - 1)$ și deci $f$ este surjecție. Mai mult $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2(3^x - 1)$. Deci ecuația $\log_2(3^x - 1) = \log_3(2^x + 1)$ este echivalentă cu ecuația $f(x) = f^{-1}(x)$. Se știe că graficele funcțiilor $f$ și $f^{-1}$ sînt simetrice față de prima bisectoare a axelor și, deci, egalitatea $f(x) = f^{-1}(x)$ se poate realiza doar pe prima bisectoare, iar rezolvarea ecuației $f(x) = f^{-1}(x)$

este echivalentă cu rezolvarea ecuației $f(x) = x$ sau a ecuației $f^{-1}(x) = x$. Avem $\log_3(2^x + 1) = x \Leftrightarrow 2^x + 1 = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$.

Deoarece $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ și $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ sînt funcții strict descrescătoare și pozitive $\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ este funcție strict descrescătoare și, deci, injectivă $\Rightarrow$ ecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ are cel mult o soluție. Se verifică că $x = 1$ este soluție.

**25.** Condiții necesare de existență a soluției $x > 0$, $y > 0$. Din prima relație $2^y - \log_3 x = 3 \Rightarrow 2^y = 3 + \log_3 x$. Dacă $y > 2 \Rightarrow 2^y > 2^2 = 4 \Rightarrow 3 + \log_3 x > 4 \Rightarrow \log_3 x > 1 \Rightarrow x > 3$. Din $y > 2$ și $x > 3 \Rightarrow 3^x > 3^3 = 27$ și $\log_2 y > \log_2 2 = 1$ și deci $3^x + \log_2 y > 28$ ceea ce este în contradicție cu ecuația a doua. Dacă $y < 2 \Rightarrow 2^y < 2^2 = 4 \Rightarrow 3 + \log_3 x < 4 \Rightarrow \log_3 x < 1 \Rightarrow x < 3$. Din $y < 2$ și $x < 3 \Rightarrow 3^x < 3^3 = 27$ și $\log_2 y < \log_2 2 = 1$ și deci, $3^x + \log_2 y < 28$ ceea ce contrazice, din nou, ecuația a doua. Dacă $y = 2 \Rightarrow 2^2 = 3 + \log_3 x \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$. Verificare.
Deci soluția $x = 3$, $y = 2$.

**26.** Fie $x = \sqrt[3]{2} + i \Rightarrow x - i = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x - i)^3 = 2 \Rightarrow i(1 - 3x^2) = 2 + 3x - x^3 \Rightarrow (i(1 - 3x^2))^2 = (2 + 3x - x^3)^2$ și după calcule obținem $x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 12x + 5 = 0$ ceea ce arată că $x$ este rădăcină a polinomului

$$f = X^6 + 3X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 12X + 5 \in \mathbf{Z}[X]$$

Din $f \in \mathbf{Z}[X]$ și $x_1 = \sqrt[3]{2} + i$ rădăcină a lui $f$ rezultă că $x_2 = \sqrt[3]{2} - i$ este tot rădăcină a lui $f$ și deci polinomul $(X - x_1)(X - x_2) = X^2 - 2\sqrt[3]{2}X + \sqrt[3]{4} + 1$ divide pe $f$. Prin împărțire directă se obține cîtul

$$g = X^4 + 2\sqrt[3]{2}X^3 + (2 + 3\sqrt[3]{4})X^2 + (4 + 2\sqrt[3]{2})X + 1 + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$$

Încercați să determinați rădăcinile lui $g$ (!!). Dacă însă ținem seama de [2] atunci aflăm imediat că rădăcinile lui $g$ sînt $x_3 = \sqrt[3]{2}\varepsilon + i$, $x_4 = \sqrt[3]{2}\varepsilon - i$, $x_5 = \sqrt[3]{2}\varepsilon^2 + i$ și $x_6 = \sqrt[3]{2}\varepsilon^2 - i$. Sugerăm cititorului să verifice că în adevăr $x_3, x_4, x_5, x_6$ sînt rădăcinile lui $g$ ($\varepsilon$ este o rădăcină complexă cubică a unității).

**27.** Se știe că orice expresie algebrică de rădăcina $x$ (de exemplu $y = x^3 - x$) verifică o ecuație de grad cel mult 4 (gradul polinomului $f$). Fie $g = aY^4 + bY^3 + cY^2 + dY + e \in \mathbf{Q}[Y]$, (1), cu rădăcina $y = x^3 - x$. Din $x$ rădăcină a lui $f$ avem $x^4 - x + 1 = 0 \Rightarrow$
$x^4 = x - 1$. Avem $y^2 = (x^3 - x)^2 = x^6 - 2x^4 + x^2 = x^4x^2 - 2x^4 + x^2 = (x - 1)x^2 - 2(x - 1) + x^2 = x^3 - 2x + 2$, (2). Apoi $y^3 = (x^3 - x)^3 = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - x^3 = (x^4)^2x - 3x^4x^3 + 3x^4x - x^3 = (x - 1)^2x - 3(x - 1)x^3 + 3(x - 1)x - x^3 = -3x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x = -3(x - 1) + 3x^3 + x^2 - 2x = 3x^3 + x^2 - 5x + 3$, (3). De

asemenea $y^4 = y^3 y = (3x^3 + x^2 - 5x + 3)(x^3 - x)$ și după calcule similare se obține $y^4 = 5x^3 + 3x^2 - 12x + 8$, (4). Din $g(y) = 0$ $a(5x^3 + 3x^2 - 12x + 8) + b(3x^3 + x^2 - 5x + 3) + c(x^3 - 2x + 2) +$ $+ d(x^3 - x) + e = 0 \Rightarrow (5a + 3b + c + d)x^3 + (3a + b)x^2 +$ $+ (-12a - 5b - 2c - d)x + 8a + 3b + 2c + e = 0$, (5)

Impunem condiția ca toți coeficienții relației (5) să fie 0.

Avem sistemul omogen

$$\begin{cases} 5a + 3b + c + d = 0 \\ 3a + b = 0 \\ -12a - 5b - 2c - d = 0 \\ 8a + 3b + 2c + e = 0 \end{cases}$$

Ne interesează soluțiile netriviale. Întrucît putem admite că polinomul $g$ este unitar luăm $a = 1$ și avem

$$\begin{cases} 3b + c + d = -5 \\ b = -3 \\ -5b - 2c - d = 12 \\ 3b + 2c + e = -8 \end{cases}$$

Rezolvînd acest ultim sistem obținem $a = 1$, $b = -3$, $c = -1$, $d = 5$, $e = 3$ și deci

$$g = Y^4 - 3Y^3 - Y^2 + 5Y + 3 \in \mathbf{Q}[Y].$$

28. Din $g = X^m - b \Rightarrow X^m = g + b$. Din teorema de împărțire cu rest a întregilor avem $p_k = mc_k + r_k$, $(\forall)\ k = \overline{1, n-1}$, $0 \leqslant r_k < m$.

Avem

$$f = a_1 X^{mc_1 + r_1} + a_2 X^{mc_2 + r_2} + \ldots + a_{n-1} X^{mc_{n-1} + r_{n-1}} + a_n =$$
$$= a_1 X^{mc_1} X^{r_1} + a_2 X^{mc_2} X^{r_2} + \ldots + a_{n-1} X^{mc_{n-1}} X^{r_{n-1}} + a_n =$$
$$= a_1 (g + b)^{c_1} X^{r_1} + a_2 (g + b)^{c_2} X^{r_2} + \ldots + a_{n-1} (g + b)^{c_{n-1}} X^{r_{n-1}} + a_n$$

Dezvoltăm fiecare paranteză $(g + b)^{c_k}$ cu binomul lui Newton. Izolăm primii $c_k$ termeni, care conțin pe $g$, și dăm în factor comun peste tot. Obținem

$$f = gc + \underbrace{a_1 b^{c_1} X^{r_1} + a_2 b^{c_2} X^{r_2} + \ldots + a_{n-1} b^{c_{n-1}} X^{r_{n-1}} + a_n}_{r}.$$

Deci $f = gc + r$. Deoarece grad $r \leqslant \max\{r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\}$ și din $r_k < m$, $(\forall)\ k = \overline{1, n-1}$, rezultă grad $r <$ grad $g$. Ținînd seama de unicitatea cîtului și a restului împărțirii polinoamelor, rezultă că $r$ este restul împărțirii lui $f$ la $g = X^m - b$.

29. Din $g = X^{12} + 3 \Rightarrow X^{12} = g - 3$. Vom nota prin $g\,\mathcal{M}(X)$ orice polinom care conține pe $g$ ca factor. Avem

$$f = (X^{12})^4 X^8 + 7X^{12} X^7 - 6X^{12} X^2 + 2X + 1 = (g - 3)^4 X^8 +$$
$$+ 7(g - 3) X^7 - 6(g - 3) X^2 + 2X + 1.$$

Dezvoltăm și dăm în factor comun. Avem

$$f = g\mathcal{M}(X) - 81X^8 - 21X^7 + 18X^2 + 2X + 1$$

și notînd $r = -81X^8 - 21X^7 + 18X^2 + 2X + 1$ obținem $f = g\mathcal{M}(X) + r$ cu grad $r <$ grad $g$. Din teorema de unicitate avem că restul împărțirii lui $f$ la $g$ este $r$.

30. Problema existenței este rezolvată în [1]. Fie $f \in \mathbf{Q}[X]$ cu grad $f = 8$ astfel încît $a + bx + cx^2 + dx^3 = \dfrac{1}{1+x^2}$, cu $f = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbf{Q}[X]$. Avem

$$1 = (1+x^2)(a + bx + cx^2 + dx^3) \Rightarrow$$
$$1 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 \quad (1)$$

Ținem seama că $x$ este rădăcină a polinomului $X^3 - X - 1$ și deci $x^3 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = x + 1$. Înlocuind în (1) avem

$1 = a + bx + cx^2 + d(x+1) + ax^2 + b(x+1) + cx(x+1) + dx^2(x+1)$ și după calcule obținem:

$$(a + 2c + d)x^2 + (2b + c + 2d)x + a + b + 2d - 1 = 0, \quad (2)$$

Deoarece polinomul $X^3 - X - 1$ este ireductibil peste $\mathbf{Q}$ (se poate verifica ușor) rezultă că $x$ nu poate satisface o relație netrivială de grad mai mic strict decît 3, și din (2) obținem

$$\begin{cases} a + 2c + d = 0 \\ 2b + c + 2d = 0 \\ a + b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2c = -d \\ 2b + c = -2d \\ a + b = 1 - 2d \end{cases}$$

și deoarece determinantul sistemului este $-5 \neq 0$ rezultă că putem alege $d = 0$. Rezolvînd acum sistemul se obține $a = \dfrac{4}{5}$, $b = \dfrac{1}{5}$, $c = -\dfrac{2}{5}$, și deci

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}x^2.$$

31. Demonstrăm că $4^n + 15n - 1$ se divide cu 9, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$. Pentru $n = 0 \Rightarrow 0 : 9$. Presupunem că $4^n + 15n - 1 = \mathcal{M}9$, (1), și demonstrăm că $[4^{n+1} + 15(n+1) - 1] : 9$. Din (1) $\Rightarrow 4^n = \mathcal{M}9 - 15n + 1$ Avem $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 14 = (\mathcal{M}9 - 15n + 1)4 + 15n + 14 = \mathcal{M}9 \cdot 4 - 60n + 4 + 15n + 14 = \mathcal{M}9 - 45n + 18 = \mathcal{M}9 - 9 \cdot 5n + 9 \cdot 2 = \mathcal{M}9$. Deci 9 divide $4^n + 15n - 1$ și deci, 27 divide $3(4^n + 15n - 1)$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.
Analog se demonstrează că 27 divide $10^n + 18n - 28$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$ Avem $f = 3X^{\mathcal{M}27} + 5X^{\mathcal{M}27} - 9X^3 + 2X - 1$ și deoarece $X^{27} = g + 1$ obținem $f = 3(g+1)^{\mathcal{M}} + 5(g+1)^{\mathcal{M}} - 9X^3 + 2X - 1$. Dezvoltînd cu binomul lui Newton și grupînd termenii avem

$$f = g\mathcal{M}(X) - 9X^3 + 2X + 7$$

Din teorema împărțirii cu rest, datorită unicității, rezultă că restul împărțirii lui $f$ la $g$ este: $-9X^3 + 2X + 7$.

**32.** Fie $x_1$, $x_2$, respectiv $y_1$, $y_2$, $y_3$ rădăcinile polinoamelor din enunț. Avem $x_1^2 - 2x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 2x_1 - 2$ și $y_3^2 = 2$. Deci $t = x_1^4 + y_3^2 = (2x_1 - 2)^2 + y_3^2 = 4(x_1^2 - 2x_1 + 1) + y_3^2 = 4(2x_1 - 2 - 2x_1 + 1) + y_3^2 = -4 + y_3^2$, (1). Avem $t^2 = 16 - 8y_3^2 + y_3^4 = 16 - 8y_3^2 + 2y_3$, (2). Din (1) $\Rightarrow y_3^2 = t + 4$ și înlocuind în (2) obținem $t^2 = 16 - 8(t + 4) + 2y_3 = 2y_3 - 8t - 16 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{2}(t^2 + 8t + 16) = \frac{1}{2}(t + 4)^2$, (3). Înlocuind acum (3) în (1) avem $t = -4 + \frac{1}{4}(t + 4)^4 \Rightarrow 4t = -16 + (t + 4)^4 \Rightarrow$

$$t^4 + 16t^3 + 96t^2 + 252t + 240 = 0$$

ceea ce arată că $t$ este rădăcină a polinomului

$$T^4 + 16T^3 + 96T^2 + 252T + 240 \in \mathbb{Z}[T].$$

Observăm că nu contează care anume sînt rădăcinile $x_1$, $x_2$, respectiv $y_1$, $y_2$, $y_3$!

**33.** Fie $E = \frac{x_1(1 - x_1^2 + x_3)}{x_2^3}$. Deoarece $x_k$, $k = 1, 2, 3$ sînt rădăcini ale ecuației $x^3 - x + 1 = 0$ avem $x_k^3 - x_k + 1 = 0 \Rightarrow x_k^3 = x_k - 1$. Din relațiile lui Viete avem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1$, $x_1x_2x_3 = -1$. Avem

$$E = \frac{x_1x_3(1 - x_1^2 + x_3)}{x_2^3} = \frac{x_1x_3 - x_1^3x_3 + x_1x_3x_3}{x_2 - 1} =$$

$$= \frac{x_1x_2 - (x_1 - 1)x_2 - 1}{x_2 - 1} = \frac{x_1x_2 - x_1x_2 + x_2 - 1}{x_2 - 1} = \frac{x_2 - 1}{x_2 - 1}$$

și deci $E = 1$.

**34.** Fie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, $a = m - 3r$, $b = m - r$, $c = m + r$, $d = m + 3r$ cu $r \neq 0$ și $x_1 = \frac{x_2}{q}$, $x_2$, $x_3 = x_2q$ cu $q \neq 1$, $x_2 \neq 0$. Folosind relațiile lui Viete avem

$$\begin{cases} \frac{x_2}{q} + x_2 + x_2q = -\frac{m - r}{m - 3r} \\ \frac{x_2^2}{q} + x_2^2 + x_2^2q = \frac{m + r}{m - 3r} \\ x_2^3 = -\frac{m + 3r}{m - 3r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{q} + 1 + q = -\frac{m - r}{m - 3r} \cdot \frac{1}{x_2} \\ x_2^2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = \frac{m + r}{m - 3r} \\ x_2^3 = -\frac{m + 3r}{m - 3r} \end{cases}$$

de unde obținem $x_2 = \frac{r+m}{r-m}$ și înlocuind în ultima relație avem $\left(\frac{r+m}{r-m}\right)^3 = -\frac{m+3r}{m-3r} \Rightarrow (r+m)^3(m-3r) = -(m+3r)(r-m)^3$.

Efectuînd calculele obținem $16r^3m = 0 \Rightarrow m = 0$ sau $r = 0$.

Deoarece $r \neq 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow a = -3r$, $b = -r$, $c = r$, $d = 3r$ și deci, ecuația devine $-3rx^3 - rx^2 + rx + 3r = 0$ adică $3rx^3 + rx^2 - rx - 3r = 0$, (1). Reciproc arătăm că ecuațiile de forma (1) au coeficienții în progresie aritmetică și rădăcinile în progresie geometrică. Evident coeficienții sînt în progresie aritmetică. Avem $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_{2,3} = \frac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$ și $x_2x_3 = 1 = x_1^2$ deci $x_2$, $x_1$, $x_3$ sînt în progresie geometrică.

35. Notăm $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Din $x^2 = \sigma \Rightarrow \varepsilon(x^2) = \varepsilon(\sigma) \Rightarrow (\varepsilon(x))^2 = \varepsilon(\tau) \Rightarrow 1 = \varepsilon(\sigma)$. Deci condiția necesară pentru existența soluției este $\varepsilon(\tau) = 1$. Se verifică ușor că $m(\sigma) = 10 \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = 1$.

$$\text{Fie } x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) & x(6) \end{pmatrix}$$

Caz. 1 $x(1) = 1 \Rightarrow x^2(1) = x(1) = 1$ și din $x^2(1) = \sigma(1) = 3 \Rightarrow$ $1 = 3$ ceea ce este absurd. Deci în toate soluțiile, dacă există, $x(1) \neq 1$.

Caz 2. $x(1) = 2 \Rightarrow x^2(1) = x(2)$ și $x^2(1) = \sigma(1) = 3 \Rightarrow x(2) = 3$;
$x(2) = 3 \Rightarrow x^2(2) = x(3)$ și $x^2(2) = \sigma(2) = 6 \Rightarrow x(3) = 6$;
$x(3) = 6 \Rightarrow x^2(3) = x(6)$ și $x^2(3) = \sigma(3) = 4 \Rightarrow x(6) = 4$;
$x(6) = 4 \Rightarrow x^2(6) = x(4)$ și $x^2(6) = \sigma(6) = 1 \Rightarrow x(4) = 1$;
$x(4) = 1 \Rightarrow x^2(4) = x(1)$ și $x^2(4) = \sigma(4) = 2 \Rightarrow x(1) = 2$.

Deci $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ care se verifică.

Caz 3. $x(1) = 3 \Rightarrow x^2(1) = x(3)$ și $x^2(1) = \sigma(1) = 3 \Rightarrow x(3) = 3$, ceea ce este imposibil deoarece $x(1) = 3 = x(3)$ și deci, $x$ nu ar fi injecție.

Caz 4. $x(1) = 4 \Rightarrow x^2(1) = x(4)$ și $x^2(1) = \sigma(1) = 3 \Rightarrow x(4) = 3$;
$x(4) = 3 \Rightarrow x^2(4) = x(3)$ și $x^2(4) = \sigma(4) = 2 \Rightarrow x(3) = 2$;
$x(3) = 2 \Rightarrow x^2(3) = x(2)$ și $x^2(3) = \sigma(3) = 4 \Rightarrow x(2) = 4$.
Din $x(1) = 4 = x(2)$ și $x$ injecție rezultă $1 = 2$ ceea ce este absurd.

Caz 5. $x(1) = 5 \Rightarrow x^2(1) = x(5)$ și $x^2(1) = \sigma(1) = 3 \Rightarrow x(5) = 3$;
$x(5) = 3 \Rightarrow x^2(5) = x(3)$ și $x^2(5) = \sigma(5) = 5 \Rightarrow x(3) = 5$.
ceea ce iar nu se poate deoarece $x(1) = 5 = x(3)$ și $x$ injecție $\Rightarrow 1 = 3$

Caz. 6. $x(1) = 6 \Rightarrow x^2(1) = x(6)$ și $x^2(1) = \sigma(1) = 3 \Rightarrow x(6) = 3$;

$x(6) = 3 \Rightarrow x^2(6) = x(3)$ și $x^2(6) = \sigma(6) = 1 \Rightarrow x(3) = 1$;

$x(3) = 1 \Rightarrow x^2(3) = x(1)$ și $x^2(3) = \sigma(3) = 4 \Rightarrow x(1) = 4$.

Din $x(1) = 6$ și $x(1) = 4$ rezultă $6 = 4$ ceea ce este absurd.

Întrucît am analizat toate cazurile posibile rămîne că singura soluție este (1).

36. Reamintim că o permutare $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ se numește ciclu de lungime $k$ dacă există $x_1, x_2, \dots, x_k$ astfel încît $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & x_1 & \dots & x_2 & \dots & x_{k-1} & \dots & x_k & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & x_2 & \dots & x_3 & \dots & x_k & \dots & x_1 & \dots & n \end{pmatrix}$ și acest $\sigma \in S_n$ se va nota prin $(x_1, x_2, \dots, x_k)$. De exemplu permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ este un ciclu de lungime 3 și, conform notației anterioare, scriem $\sigma = (1,3,5)$. Teorema de descompunere a permutărilor arată că orice permutare din $S_n$ se descompune în produs de permutări ciclice (cicli) disjuncte. Mai mult, descompunerea este unică pînă la ordinea ciclilor, deoarece compunerea a doi cicli este comutativă.

În permutarea $\sigma$ există ciclurile $(1,7,9)$, $(2,6,3)$, $(4,8)$.

Punctele fixe nu se iau în considerație. Rămîne că

$$\sigma = (1,7,9)(2,6,3)(4,8)$$

37. Reamintim că ordinul unei permutări $\sigma \in S_n$ este cel mai mic număr natural $p$ cu proprietatea că $\sigma^p = e$, unde $e$ este permutarea identică în $S_n$. Dăm în continuare două observații.

Obs. 1. Ordinul unui ciclu este lungimea sa.

Obs. 2. Fie permutarea $\sigma \in S_n$ scrisă ca produsul ciclilor $c_1, c_2, \dots, c_k$ de lungimi $m_1, m_2, \dots, m_k$. Atunci ordinul permutării $\tau$ este $[m_1, m_2, \dots, m_k]$, adică cel mai mic multiplu comun al numerelor $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Trecem la rezolvarea problemei. Descompunerea permutării $\sigma$ este $\sigma = (1,7,2,5)(3,11,8)(4,6,9,10)$. Lungimile ciclilor sînt 4, 3 și 4. Deci ord. $\sigma = [4,3,4] = 12$.

38. Observăm că dacă $\pi \in S_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \pi(k) = \sum_{k=1}^{n} k$ și $\sum_{k=1}^{n} (\pi(k))^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

„$\Rightarrow$" Presupunem că $M_n \neq \Phi$ și fie $\sigma$ și $\tau \in M_n$. Scriem cele $n$ numere consecutive sub forma $a+1, a+2, \dots, a+n$ cu $a \in \mathbb{N}$ și atunci avem $\sigma(k) + \tau(k) = a + k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\sigma(k) + \tau(k)) = \sum_{k=1}^{n} (a+k) = na + \sum_{k=1}^{n} k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k = na + \sum_{k=1}^{n} k \Leftrightarrow na = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n = 2a - 1$ și deci, în mod necesar, $n$ impar.

„⇐" Să dăm un exemplu pentru $n$ impar

$$\sigma(k) = \begin{cases} 2k - 1 \text{ pentru } k \leqslant \dfrac{n+1}{2} \\ 2k - 1 - n \text{ pentru } k > \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

$$\tau(k) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} - k + 1 \text{ pentru } k \leqslant \dfrac{n+1}{2} \\ \dfrac{n+1}{2} - k + 1 + n \text{ pentru } k > \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

Se verifică ușor că $\sigma$ și $\tau \in S_n$ și $\sigma(k) + \tau(k) = \dfrac{n+1}{2} + k$ și deci $\sigma(1) + \tau(1), \sigma(2) + \tau(2), \ldots, \sigma(n) + \tau(n)$ sînt consecutive. Trecem acum la partea a doua a problemei. Fie $\sigma \in M_n$ și permutarea asociată prin ipoteză ($n$ impar). Am arătat că

$$\sigma(k) + \tau(k) = \frac{n+1}{2} + k \Leftrightarrow \sigma(k) - k = \frac{n+1}{2} - \tau(k) \Rightarrow (\sigma(k) - k)^2 = \left(\frac{n+1}{2} - \tau(k)\right)^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\sigma(k) - k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2} - \tau(k)\right)^2.$$

Dar $\sum_{k=1}^{n} (\sigma(k) - k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (\sigma(k))^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) \cdot k + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k\sigma(k) + \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)$, (1). Deci

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2} - \sigma(k)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{2}\tau(k) + \sum_{k=1}^{n} (\tau(k))^2 = n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - (n+1)\sum_{k=1}^{n} \tau(k) + \sum_{k=1}^{n} k^2, \text{ (2). Din (1)=(2)}$$

avem $2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k\sigma(k) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - (n+1)\sum_{k=1}^{n} \tau(k) + \sum_{k=1}^{n} k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k\sigma(k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + (n+1)\sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{n(n+1)(7n+5)}{24}$

și deci $\sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)$ este constantă pentru $(\forall)\ \sigma \in M_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k\sigma_1(k) = \sum_{k=1}^{n} k\sigma_2(k)$, $(\forall)\ \sigma_1, \sigma_2 \in M_n$.

**39.** Vom folosi în cursul soluției, teorema care afirmă că orice permutare de grad $n$ se scrie esențialmente unic ca un produs de cicli disjuncți.

„$\Leftarrow$" Trebuie să demonstrăm că dacă $n \in \{1,2,3,4,5\}$ atunci $A_n = \{\tau^2 \mid \tau \in S_n\}$ și deoarece incluziunea $A_n \supset \{\tau^2 \mid \tau \in S_n\}$ este evidentă, mai rămîne de demonstrat că $A_n \subset \{\tau^2 \mid \tau \in S_n\}$.

Fie $\sigma \in A_n$, adică $\sigma$ este o permutare pară.

Pentru $n = 1$ și $n = 2$ afirmația este evidentă.

Pentru $n = 3$ permutările pare sînt $e$ și ciclurile de lungime 3

Dacă $\sigma = e$ atunci luăm $\tau = e \Rightarrow \tau^2 = \sigma$.

Dacă $\sigma$ este ciclu de lungime 3 $\Rightarrow \sigma^3 = e \Rightarrow \sigma^4 = \sigma$ și luăm $\tau = \sigma^2 \Rightarrow \tau^2 = \sigma^4 = \sigma$.

Pentru $n = 4$ avem că $\sigma = e$ sau $\sigma$ este compunere de două transpoziții disjuncte sau $\sigma$ este ciclu de lungime 3.

Dacă $\sigma$ este compunere de două transpoziții disjuncte,

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix} \text{atunci } \tau = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \text{și } \tau^2 = \sigma.$$

Dacă $\sigma$ este $e$ sau ciclu de lungime 3 atunci procedăm ca la $n = 3$.

Pentru $n = 5$ avem că $\sigma = e$ sau $\sigma$ este compunerea a două transpoziții disjuncte sau $\sigma$ este ciclu de lungime 3 sau $\sigma$ este ciclu de lungime 5.

Dacă $\sigma$ este compunere de două transpoziții disjuncte sau este ciclu de lungime 3 procedăm ca la cazul $n = 4$.

Dacă $\sigma$ este ciclu de lungime 5 atunci $\sigma^5 = e \Rightarrow \sigma^6 = \sigma$ și luăm $\tau = \sigma^3 \Rightarrow \tau^2 = \sigma^6 = \sigma$.

„$\Rightarrow$" Vom demonstra că dacă $n \geqslant 6$ afirmația este falsă. Considerăm $\sigma \in A_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 & x_6 \\ x_6 & x_5 \end{pmatrix}$. Vom arăta că $(\forall)\ \tau \in S_6 \Rightarrow \tau^2 \neq \sigma$

Considerăm descompunerile posibile în $S_6$.

Caz 1. $\sigma$ este produs de 1, 2 sau 3 transpoziții disjuncte $\tau^2 = e \neq \sigma$.

Caz 2. $\tau$ este produs de 1 transpoziție și 1 ciclu de lungime 3 $\Rightarrow \tau^2$ are punct fix $\Rightarrow \tau^2 \neq \sigma$ deoarece $\sigma$ nu are puncte fixe.

Caz 3. $\tau$ este produs de 1 transpoziție și 1 ciclu de lungime 4 $\Rightarrow \tau^2$ este ciclu de lungime 4 sau produs de 2 transpoziții $\Rightarrow \tau^2 \neq \sigma$.

Caz 4. $\tau$ este ciclul de lungime 3, 4 sau 5 $\Rightarrow \tau^2$ are puncte fixe $\tau^2 \neq \sigma$ deoarece $\sigma$ nu are puncte fixe.

Caz 5. $\tau$ este produs de două cicluri de lungime 3 disjuncte $\Rightarrow \tau^2$ este tot format din 2 cicluri de lungime 3 $\Rightarrow \tau^2 \neq \sigma$.

Caz 6. $\tau$ este ciclu de lungime 6 $\Rightarrow \tau^6 = e$. Presupunînd că $\tau^2 = \sigma$ deoarece permutarea din ipoteză are proprietatea că $\sigma^4 = e$ avem $\tau^8 = e \Rightarrow$ ordinul lui $\tau$ este 2, 4 sau 8 (divizor al lui 8) ceea ce este în contradicție cu ord. $\tau = 6$.

Arătăm că pentru $n > 6$ afirmația este falsă. Fie

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 & x_6 \\ x_6 & x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_7 \dots & x_n \\ x_7 \dots & x_n \end{pmatrix}$$

a) Dacă $\tau$ permmută între ele elementele $x_1, \dots, x_6$ atunci sîntem într-unul din cazurile anterioare și deci $\tau^2 \neq \sigma$.

b) Presupunem că $(\exists)\, i \in \{1,2,\ldots,6\}$ astfel încît $\tau(x_i) = x_\alpha$, $\alpha \geqslant 7$.
Atunci $\tau(x_\alpha) = x_\beta$, $\beta \geqslant 1$; $\tau(x_\beta) = x_\gamma$, $\gamma \geqslant 1$
şi $\sigma(x_i) = \tau^2(x_i) = \tau(x_\alpha) = x_\beta$, $\beta \in \{1,2,\ldots,6\}$
$\sigma(x_\alpha) = \tau^2(x_\alpha) = \tau(x_\beta) = x_\gamma$. Dar $\sigma(x_\alpha) = x_\alpha \Rightarrow x_\alpha = x_\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$.
Avem $\tau(x_\beta) = x_\alpha \Rightarrow \sigma(x_\beta) = \tau^2(x_\beta) = \tau(\tau(x_\beta)) = \tau(x_\alpha) = x_\beta$.
Deci $\sigma(x_\beta) = x_\beta$ cu $\beta \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ ceea ce este absurd deoarece $\sigma$ nu are puncte fixe pentru $x_1, x_2, \ldots, x_6$.
Cu această demonstraţia este încheiată.

**40.** Avem $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Afirm că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$, (1)

Demonstrăm prin inducţie matematică. Pentru $n = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ceea ce este adevărat. Presupunem $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$. Avem $B^{n+1} = A^n A$ şi efectuînd calculele se obţine afirmaţia. Avem $A + A^2 + \ldots + A^n = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} +$

$$+ \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a^k & \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{n} a^k \end{pmatrix} \quad (2)$$

Caz 1. $a \neq 1$. Atunci $\sum_{k=1}^{n} a^k = a\,\dfrac{1-a^n}{1-a}$ şi fie $S = \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$, (3)
şi $aS = \sum_{k=1}^{n} ka^k$, (4). Scăzînd (4) din (3) avem $S - aS = 1 + a +$
$+ \ldots + a^{n-1} - na^n \Rightarrow S(1-a) = \dfrac{1-a^n}{1-a} - na^n$ şi deci
$S = \dfrac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(1-a)^2}$ şi înlocuind în (2) găsim

$$A + A^2 + \ldots + A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1-a^n}{1-a} & \dfrac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(1-a)^2} \\ 0 & \dfrac{1-a^n}{1-a} \end{pmatrix}$$

şi, în final, $det(A + A^2 + \ldots + A^n) = \left(\dfrac{1-a^n}{1-a}\right)^2$

**41.** Vom da mai întîi următoarea:
Lemă. Dacă $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încît $AB = BA$ atunci $det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
Demonstraţie. Din $AB = BA$ avem $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB) =$
$= (A + iB)\overline{(A + iB)}$ şi deci $det(A^2 + B^2) = det(A + iB)\overline{(A + iB)} =$

$= det\,(A + iB)\,det\,(\overline{A + iB}) = det\,(A + iB)\,\overline{det\,(A + iB)} =$
$= |\,det\,(A + iB)\,|^2 \geqslant 0$, ceea ce încheie demonstrația lemei.

Revenim la rezolvarea exercițiului. Din $AB = O_n \Rightarrow I_n + A + B + A^2 + B^2 = (I_n + A + A^2)(I_n + B + B^2) = \left[\left(A + \frac{1}{2} I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_n\right)^2\right]\left[\left(B + \frac{1}{2} I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_n\right)^2\right]$

și deci $det\,(I_n + A + B + A^2 + B^2) = det\left[\left(A + \frac{1}{2} I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_n\right)^2\right] \cdot det\left[\left(B + \frac{1}{2} I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_n\right)^2\right] \geqslant 0$.

42. Fie $\varepsilon$ o rădăcină complexă cubică a unității. Reamintim că $\varepsilon^3 = 1$, $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon}$, $1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0$, $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$.

Ținînd seama și de comutativitatea din enunț avem
$(A + \varepsilon B + \bar{\varepsilon}C)(A + \bar{\varepsilon}B + \varepsilon C) = A^2 + \bar{\varepsilon}AB + \varepsilon AC + \varepsilon BA + \varepsilon\bar{\varepsilon}B^2 + \varepsilon^2 BC + \bar{\varepsilon}CA + \bar{\varepsilon}^2 CB + \bar{\varepsilon}\varepsilon C^2 = A^2 + B^2 + C^2 + (\bar{\varepsilon} + \varepsilon)AB + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})CA + (\varepsilon^2 + \bar{\varepsilon}^2)BC = A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC$ și deci $det\,(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) = det\,(A + \varepsilon B + \bar{\varepsilon}C)(A + \bar{\varepsilon}B + \varepsilon C) = det\,(A + \varepsilon B + \bar{\varepsilon}C)\,det\,(A + \bar{\varepsilon}B + \varepsilon C) = det\,(A + \varepsilon B + \bar{\varepsilon}C)\,\overline{det\,(A + \varepsilon B + \bar{\varepsilon}C)} = |\,det\,(A + B + C)\,|^2 \geqslant 0$.

43. Se știe că $A^2 - (a + d)A + det\,(A)\,I_2 = O_2$, (1). Înmulțind la dreapta cu $B$ avem $A^2B - (a + d)AB + det\,A \cdot B = O_2$, (2). Înmulțind (1) la stînga cu $B$ avem $BA^2 - (a + d)BA + det\,A \cdot B = O_2$, (3)

Scăzînd relațiile (2) și (3) obținem:
$A^2B - BA^2 + (a + d)(BA - AB) = O_2 \Rightarrow A^2B - BA^2 = (a + d)(AB - BA)$

Deci $A^2B - BA^2 = O_2 \Leftrightarrow AB - BA = O_2$ și $A^2B = BA^2 \Leftrightarrow AB = BA$ ceea ce trebuia demonstrat.

44. a) $A^2 = O_n$. Avem $det\,(A + I_n) = det\left(\frac{1}{4}A^2 + A + I_n\right) = det\left(\frac{1}{2}A + I_n\right)^2 = \left|det\left(\frac{1}{2}A + I_n\right)\right|^2 \geqslant 0$ și $det\,(A - I_n) = det\,(-(I_n - A)) = (-1)^n det\,(I_n - A) = (-1)^n det\left(I_n - A + \frac{1}{4}A^2\right) = (-1)^n det\left(I_n - \frac{1}{2}A\right) = (-1)^n \left|det\left(I_n - \frac{1}{2}A\right)\right|^2 \leqslant 0$, deoarece $n$ este impar.

Deci $\det\,(A + I_n) \geqslant 0 \geqslant \det\,(A - I_n)$.

b) $A^2 = I_n$. Avem $0 \leqslant (\det\,(A + I_n))^2 = \det\,(A + I_n)^2 = \det\,(A^2 + 2A + I_n) = \det\,(2A + 2I_n) = \det\,(2(A + I_n)) = 2^n \det\,(A + I_n) \Rightarrow 2^n \det\,(A + I_n) \geqslant 0 \Rightarrow \det\,(A + I_n) \geqslant 0$.

De asemenea $\det(A - I_n) = \det(-(I_n - A)) = (-1)^n \det(I_n - A) =$
$= (-1)^n \det\left(\frac{1}{2}(2I_n - 2A)\right) = (-1)^n \frac{1}{2^n} \det(2I_n - 2A) =$
$= (-1)^n \frac{1}{2^n} \det(I_n - 2A + A^2) = (-1)^n \frac{1}{2^n} \det(I_n - A)^2 =$
$= (-1)^n \frac{1}{2^n} (\det(I_n - A))^2 \leqslant 0 \Rightarrow \det(A - I_n) \leqslant 0.$

Deci $\det(A + I_n) \geqslant 0 \geqslant \det(A - I_n)$.

45. Caz 1. Determinăm $\alpha$ și $\beta$ din sistemul

$$\begin{cases} a_1 = \alpha r_1 + \beta r_2 \\ a_2 = \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 \end{cases}$$

Demonstrăm prin inducție matematică. Pentru $n = 1$ și $n = 2$ afirmația rezultă adevărată, din rezolvarea sistemului anterior. Presupunem că $(\forall)\ 2 \leqslant k \leqslant n$ avem $a_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k$ și demonstrăm că $a_{n+1} = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}$. Avem $a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} = a(\alpha r_1^n + \beta r_2^n) + b(\alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1}) = \alpha r_1^{n-1}(ar_1 + b) + \beta r_2^{n-1}(ar_2 + b) = \alpha r_1^{n-1} r_1^2 + \beta r_2^{n-1} r_2^2 = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1}$ ceea ce trebuia demonstrat.

Caz. 2. Din ecuația caracteristică $x^2 - ax - b = 0$ cu rădăcinile $r_1 = r_2 = r \Rightarrow 2r = a$ și $r^2 = -b$, (1). Determinăm $\alpha$ și $\beta$ din

$$\begin{cases} a_1 = \alpha r + \beta r \\ a_2 = \alpha r^2 + 2\beta r^2 \end{cases}$$

Demonstrăm prin inducție matematică. Pentru $n = 1$ și $n = 2$ afirmația rezultă adevărată din rezolvarea sistemului anterior.

Presupunem că $(\forall)\ 2 \leqslant k \leqslant n$ avem $a_k = (\alpha + \beta k) r^k$ și demonstrăm că $a_{n+1} = [\alpha + \beta(n+1)] r^{n+1}$. Avem $a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} = a(\alpha + \beta n) r^n + b(\alpha + \beta(n-1)) r^{n-1}$ și folosind (1) obținem $a_{n+1} = 2r(\alpha + \beta n) r^n - r^2(\alpha + \beta(n-1)) r^{n-1} = r^{n+1}(2\alpha + 2\beta n - \alpha - \beta n + \beta) = r^{n+1}(\alpha + \beta n + \beta) = r^{n+1}(\alpha + \beta(n+1))$.

Aplicație. Din prima relație a sistemului avem $y_n = x_{n+1} - 3x_n \Rightarrow y_{n+1} = x_{n+2} - 3x_{n+1}$. Înlocuind în relația a doua avem $x_{n+2} - 3x_{n+1} = -x_n + x_{n+1} - 3x_n \Rightarrow x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$.

Ecuația caracteristică este $x^2 - 4x + 4 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = r_2 = 2$.

Deci $x_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$, unde $\alpha$ și $\beta$ se determină din condițiile inițiale.

Pentru $n = 0 \Rightarrow \alpha = x_0 = 1$ și din prima relație a sistemului avem $x_1 = 3x_0 + y_0 = 4$. Pentru $n = 1$
$4 = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow \beta = 1$. Deci $x_n = 2^n + n2^n = 2^n(n+1)$
$x_{n+1} = 2^{n+1}(n+2)$ și din $y_n = x_{n+1} - 3x_n = 2^n(1-n)$.

Deci $x_n = 2^n(n+1)$ și $y_n = 2^n(1-n)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{N}$.

46. Caz 1. Se determină $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ din sistemul

$$\begin{aligned} \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 &= a_1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 + \gamma r_3^2 &= a_2 \\ \alpha r_1^3 + \beta r_2^3 + \gamma r_3^3 &= a_3 \end{aligned}$$

care admite soluţie unică, deoarece determinantul sistemului este nenul. Demonstrăm prin inducţie. Pentru $n = 1,2,3$ relaţia este adevărată după cum rezultă din rezolvarea sistemului anterior. Presupunem că $(\forall)\ 3 \leqslant k \leqslant n$ $a_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k + \gamma r_3^k$ şi demonstrăm că $a_{n+1} = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1} + \gamma r_3^{n+1}$. Din relaţia de recurenţă avem $a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2}$ şi deci $a_{n+1} = a(\alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n) + b(\alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1} + \gamma r_3^{n-1}) + c(\alpha r_1^{n-2} + \beta r_2^{n-2} + \gamma r_3^{n-2}) = \alpha r_1^{n-2}(ar_1^2 + br_1 + c) + \beta r_2^{n-2}(ar_2^2 + br_2 + c) + \gamma r_3^{n-2}(ar_3^2 + br_3 + c) = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1} + \gamma r_3^{n+1}$.

Caz 2. Se determină $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ din sistemul

$$\begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_1 + \gamma r_2 = a_1 \\ \alpha r_1^2 + \beta 2r_1^2 + \gamma r_2^2 = a_2 \\ \alpha r_1^3 + \beta 3r_1^3 + \gamma r_2^3 = a_3 \end{cases}$$

care admite soluţie unică deoarece determinantul sistemului este nenul. Demonstrăm prin inducţie matematică. Pentru $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 3$ afirmaţia este adevărată, rezultînd din rezolvarea sistemului anterior. Presupunem că $(\forall)\ 3 \leqslant k \leqslant n$, $a_k = \alpha r_1^k + \beta k r_1^k + \gamma r_2^k$ şi demonstrăm că $a_{n+1} = \alpha r_1^{n+1} + \beta(n+1) r_1^{n+1} + \gamma r_2^{n+1}$.

Avem $a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot a_{n-2} + c \cdot a_{n-1} = a(\alpha r_1^n + \beta n r_1^n + \gamma r_2^n) + b[\alpha r_1^{n-1} + \beta(n-1) r_1^{n-1} + \gamma r_2^{n-1}] + c[\alpha r_1^{n-2} + \beta(n-2) r_1^{n-2} + \gamma r_2^{n-2}] = \alpha r_1^{n-2}(ar_1^2 + br_1 + c) + \beta r_1^{n-2}(nar_1^2 + b(n-1) r_1 + (n-2) c) + \gamma r_2^{n-2}(ar_2^2 + br_2 + c) = \alpha r_1^{n+1} + \beta r_1^{n-2}[(n-2)(ar_1^2 + br_1 + c) + 2ar_1^2 + br_1] + \gamma r_2^{n+1} = \alpha r_1^{n+1} + \beta(n+1) r_1^{n+1} + \gamma r_2^{n+1}$. Am folosit faptul că $r_1$ este rădăcină dublă a polinomului $X^3 - aX^2 - bX - c$ şi deci este rădăcină şi pentru polinomul derivat, adică $3X^2 - 2aX - b$ şi deci $r_1^3 = ar_1^2 + br_1 + c$ şi $3r_1^2 = 2ar_1 + b$, $3r_1^3 = 2ar_1^2 + br_1$

Caz 3. Se determină $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ din sistemul

$$\begin{cases} \alpha r + \beta r + \gamma r = a_1 \\ \alpha r^2 + \beta 2r^2 + \gamma 4r^2 = a_2 \\ \alpha r^3 + \beta 3r^3 + \gamma 9r^3 = a_3 \end{cases}$$

care admite soluţie unică deoarece determinantul sistemului este nenul.

Din relaţiile lui Viete avem $a = 3r$, $b = -3r^2$ şi $c = r^3$. Presupunem că $(\forall)\ 3 \leqslant k \leqslant n$ avem $a_k = \alpha r^k + \beta k r^k + \gamma k^2 r^k$ şi demonstrăm că $a_{n+1} = \alpha r^{n+1} + \beta(n+1) r^{n+1} + \gamma(n+1)^2 r^{n+1}$. Avem $a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2} = 3r(\alpha + \beta n + \gamma n^2) r^n - 3r^2[\alpha + \beta(n-1) + \gamma(n-1)^2] r^{n-1} + r^3[\alpha + \beta(n-2) + \gamma(n-2)^2] r^{n-2}$ După calcule elementare se ajunge la $a_{n+1} = \alpha r^{n+1} + \beta(n+1) r^{n+1} + \gamma(n+1)^2 r^{n+1}$ ceea ce încheie demonstraţia.

Aplicaţie. Din prima relaţie avem $y_n = x_{n+1} - x_n$. Din relaţia a doua $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + z_n \Rightarrow z_n = x_{n+2} - x_{n+1} - x_n$ Înlocuind în ultima relaţie şi efectuînd calculele se ajunge la

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2x_n = 0$$

Ecuaţia caracteristică este $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Deci termenul general $x_n$ este $x_n = \alpha(-1)^n +$

$+ \beta + \gamma 2^n$, unde $\alpha, \beta, \gamma$ se determină din condițiile inițiale $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ și $x_3 = 3$. Obținem

$$x_n = \frac{2^{n+1} + 3 + (-1)^n}{6}$$

$$y_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

$$z_n = \frac{2^{n+1} - 3 + (-1)^n}{6}$$

**47.** Presupunem că $A^2 + pA + qI_n = O_n \Rightarrow A^2 + pA + \frac{p^2}{4} I_n - \frac{p^2}{4} I_n + qI_n = 0 \Rightarrow \left(A + \frac{p}{2} I_n\right)^2 = \frac{p^2}{4} I_n - qI_n = \frac{p^2 - 4q}{4} I_n \Rightarrow \det\left(A + \frac{p}{2} I_n\right)^2 = \det \frac{p^2 - 4q}{4} I_n \Rightarrow \left[\det\left(A + \frac{p}{2} I_n\right)\right]^2 = \left(\frac{p^2 - 4q}{4}\right)^n$ relație imposibilă deoarece membrul stîng este pozitiv și membrul drept este strict negativ.

**48.** Din [1] rezultă că $A$ este rădăcină a polinomului său caracteristic

$$p_A(X) = \det(XI_n - A) = \det\left(\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X \end{pmatrix} = X^3 - X^2 - 2X. \text{ Deci } A^3 - A^2 - 2A = O_3. \quad (1).$$

Polinomul minimal căutat în problemă este divizor al polinomului $X^3 - X^2 - 2X = X(X^2 - X - 2) = X(X - 2)(X + 1)$. Deci polinomul minimal este unul dintre polinoamele $X$; $X - 2$; $X + 1$ $X(X - 2)$; $X(X + 1)$; $(X - 2)(X + 1)$; $X(X - 2)(X + 1)$.

Prin verificare directă găsim că $A$ nu verifică nici una din relațiile $A = O_3$; $A - 2I_3 = O_3$; $A + 1I_3 = O_3$; $A(A - 2I_3) = O_3$; $A(A + I_3) = O_3$; $(A - 2I_3)(A + 1I_3) = O_3$; și deci polinomul minimal este $X(X - 2)(X + 1)$ adică $A(A - 2I_3)(A - 1I_3) = O_3$.

Trecem acum la calculul matricei $A^n$. Avem

$A = 0 \cdot A^2 + 1 \cdot A + 0 \cdot I_3$ și punem $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$;

$A^2 = 1 \cdot A^2 + 0 \cdot A + 0 \cdot I_3$ și punem $a_2 = 1$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$;

$A^3 = 1 \cdot A^2 + 2 \cdot A + 0 \cdot I_3$ și punem $a_3 = 1$, $b_3 = 2$, $c_3 = 0$.

Presupunem că $A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$ și demonstrăm că $A^{n+1} = a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A + c_{n+1} I_3$, de unde vom stabili și recurențele pentru șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ și $(c_n)_{n \geq 1}$. Avem $A^{n+1} = A^n A = (a_n A^2 + b_n A + c_n I_3) A = a_n A^3 + b_n A^2 + c_n A = a_n(A^2 + 2a) + b_n A^2 + c_n A = (a_n + b_n) A^2 + (2a_n + c_n) A + 0 \cdot I_3$ și punem

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + c_n, \quad c_{n+1} = 0$$

Se verifică uşor că $c_n = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ şi deci rămîne

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_n = 2a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} + a_n + 2a_{n-1}$$

care este un şir recurent de ordinul doi. Ecuaţia caracteristică este $x^2 = x + 2$ (comparaţi cu polinomul caracteristic!) cu rădăcinile $r_1 = 2$ şi $r_2 = -1$. Deci, ţinînd cont de modul de rezolvare de la problema 45, obţinem $a_n = \frac{1}{6} 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$ şi din $b_n = 2a_{n-1}$ obţinem $b_n = \frac{1}{3} 2^{n-1} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1}$. Înlocuind acum în $A^n = a_n A^2 + b_n A$ avem $A^n = \left[\frac{2^n}{6} + \frac{(-1)^n}{3}\right] A^2 + \left[\frac{2^{n-1}}{3} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1}\right] A =$

$$= \left[\frac{2^n}{6} + \frac{(-1)^n}{3}\right] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \left[\frac{2^{n-1}}{3} + \frac{2}{3}(-1)^{n-1}\right] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se ajunge la

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n-1} & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n-1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

**49.** Din $A^2 = I_n \Rightarrow \det(A^2) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow [\det(A)]^2 = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ $\Rightarrow A$ inversabilă. Fie $X \in M_n(\mathbb{R})$. Considerînd $X = Y + Z$ şi înmulţind la stînga cu $A$ avem $AX = AY + AZ = Y - Z$. Deci

$$\begin{cases} AX = Y - Z \\ X = \quad + Z \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem avem $Y = \frac{1}{2}(I_n + A)\, X$, $Z = \frac{1}{2}(I_n - A)X$.

Lăsăm ca exerciţiu verificarea faptului cu $Y$ şi $Z$ satisfac condiţiile din enunţ.

Demonstrăm unicitatea. Fie $Y$, $Z \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încît $X = Y' + Z'$, $AY' = Y'$, $AZ' = -Z'$. Deoarece $Y$ şi $Z$, determinate anterior satisfac condiţiile $X = Y + Z$, $AY = Y$, $AZ = -Z$ avem $Y' + Z' = Y + Z \Rightarrow$ $\Rightarrow Y - Y' = Z' - Z \Rightarrow A(Y - Y') = A(Z' - Z) \Rightarrow AY -$ $- AY' = AZ' - AZ \Rightarrow Y - Y' = -Z' + Z \Rightarrow Z' - Z = -Z' +$ $+ Z \Rightarrow 2Z' = 2Z \Rightarrow Z' = Z \Rightarrow Y = Y'$ ceea ce arată că $Y$ şi $Z$ sînt unice cu proprietatea cerută.

**50.** Fie $X \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încît $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X^n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \det(X) = 0$. Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = (x + t)\, X$, (vezi exerciţiul

48, partea referitoare la polinomul caracteristic) și prin inducție matematică, se ajunge la $X^n = (x + t)^{n-1} X$ de unde

$$\begin{cases} x(y + t)^{n-1} = 1 \\ y(x + t)^{n-1} = 2 \\ z(x + t)^{n-1} = 2 \\ t(x + t)^{n-1} = 4. \end{cases}$$

Din $x(x + t)^{n-1} = 1$ și $t(x + t)^{n-1} = 4$ prin adunare rezultă $(x + t)^n = 5 = 5(\cos 0 + i \sin 0) \Rightarrow$

$$x + t = \sqrt[n]{5}\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right), \; k \in \{0,1,\ldots,n\}. \quad (1)$$

Deci $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ unde $xt - yz = 0$ și $x + t$ este dat de (1).

51. Avem $ABC + AB + BC + AC + A + B + C + I_n = I_n \Rightarrow$
$\Rightarrow (A + I_n)(B + I_n)(C + I_n) = I_n$.
Fie $X,Y,Z \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încît $XYZ = I_n$. Atunci $\det(I_n) = 1 = \det(XYZ) = \det(X) \cdot \det(Y) \cdot \det(Z) \Rightarrow \det(X), \det(Y), \det(Z) \in \mathbf{R}^* \Rightarrow X,Y,Z$ sînt inversabile. Deci $(\exists)X^{-1}$ de unde $XYZ = I_n \Rightarrow YZ = X^{-1} \Rightarrow YZX = I_n$. Dacă înlocuim $X = A + I_n$, $Y = B + I_n$ și $Z = C + I_n$ rezultă că $(A + I_n)(B + I_n)(C + I_n) = (B + I_n)(C + I_n)(A + I_n)$.
Dezvoltînd aceste produse, după calcule, obținem
$ABC - BCA = (B + C)A - A(B + C) \Leftrightarrow A(BC) - (BC)A = (B + C)A - A(B + C) \Leftrightarrow A(BC) = (BC)A \Leftrightarrow (B + C) = (B + C)A$
adică ce trebuia demonstrat.

52. Din $x > a$ și $y > a \Rightarrow x - a > 0$ și $y - a > \Rightarrow xy - ax - ay + a^2 > 0 \Rightarrow xy - ax - ay + a^2 + a > a \Rightarrow x \in (a,+\infty)$ și $\cdot$ este lege de compoziție pe $(a,+\infty)$. Asociativitatea legii de compoziție $x^*$ se verifică prin calcul (exercițiu).

Elementul neutru. Avem $x * e = x \Rightarrow xe - ax - ae + a^2 + a = x \Rightarrow x(e - a - 1) - a(e - a - 1) = 0 \Rightarrow (x - a)(e - a - 1) = 0$ și deoarece $x > a$ rezultă $e = a + 1$. Evident $e \in (a,+\infty)$. Se verifică $(a + 1) \cdot x = x$ pentru $(\forall)x \in (a,+\infty)$.

Elemente simetrizabile. Avem $x \cdot x' = a + 1 \Rightarrow xx' - ax - ax' + a^2 + a = a + 1 \Rightarrow x'(x - a) = ax - a^2 + 1 \Rightarrow x' = \dfrac{ax - a^2 + 1}{x - a}$.

Verificăm că $x' \in (a,+\infty)$. În adevăr $x' > a \Leftrightarrow \dfrac{ax - a^2 + 1}{x - a} > a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax - a^2 + 1 > a(x - a) \Leftrightarrow 1 > 0$ ceea ce este adevărat și deci $x' \in (a,+\infty)$. Se mai verifică că $x' \times x = a + 1$ (exercițiu)

ii) Căutăm $f: G_a \to G_b$ de formă liniară. Se verifică că $f(x) = x + b - a$ realizează izomorfismul. Evident $f$ este bijecție.

Avem $f(x \times y) = x \times y + b - a = xy - ax - ay + a^2 + a + b - a = xy - ax - ay + a^2 + b$, (1). şi $f(x) \cdot f(y) = f(x)f(y) - bf(x) - bf(y) + b^2 + b = (x + b - a)(y + b - a) - b(x+b-a) - b(y + b - a) + b^2 + b = xy - ax - ay + a^2 + b$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă $f$ morfism.

Deci $(\forall)\, a,b \in \mathbf{R}_+^* \Rightarrow G_a \simeq G_b$ şi luînd $b = 0 \Rightarrow (\forall) a \in \mathbf{R} \Rightarrow G_a \simeq G_0$

Dar $G_0$ este intervalul $(0,+\infty)$ cu legea $x \cdot y = xy \Rightarrow G_0 = (\mathbf{R}_+^*,\cdot)$

Funcţia $g(x) = \ln x$ realizează un izomorfism între $(\mathbf{R}_+^*,\cdot)$ şi $(\mathbf{R},+)$

Deci $(\forall)\, a,b \in \mathbf{R}^* \Rightarrow G_a \simeq G_b \simeq (\mathbf{R}_+^*,\cdot) \simeq (\mathbf{R},+)$.

53. Fie $k \in \mathbf{Z}$ arbitrar. Evident $(\forall)\, x,y \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbf{Z}$ şi „$\cdot$" este lege de compoziţie pe $\mathbf{Z}$. Fie $x,y,z \in \mathbf{Z}$ arbitrare. Avem

$$(x \cdot y) \cdot z = l^2x + lmy + mz + lk + k \text{ şi}$$
$$x \cdot (y \cdot z) = lx + mly + m^2 z + mk + k \Rightarrow$$

şi deoarece $\cdot$ trebuie să fie asociativă avem

$l^2x + lmy + mz + lk + k = lx + mly + m^2z + mk + k$,

$(l^2 - l)x + (m - m^2)z + (l - m)k = 0$, $(\forall)\, x,z$, $l^2 - l = 0$ şi

$m - m^2 = 0$ şi din $m, l \in \mathbf{Z}^* \Rightarrow l = m = 1$.

Deci $x \cdot y = x + y + k$. Se verifică uşor că $e = -k$ este elementul neutru şi $x' = -x - 2k$ este simetricul lui $x$. Rămîne că $G_k = (\mathbf{Z}^*,\cdot)$ este grup.

Fie $G_{k_1}$ cu $x \cdot y + x + y + k_1$ şi $G_{k_2}$ cu $x \circ y = x + y + k_2$.

Trebuie determinat $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ astfel încît $f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$.

Problema revine la rezolvarea ecuaţiei funcţionale

$$f(x + y + k_1) = f(x) + f(y) + k_2,\ (\forall) xy \in \mathbf{Z}$$

Căutăm printre funcţiile polinomiale de gradul 1, $f(x) = x + a$

Avem $x + y + k_1 + a = x + a + y + a + k_2 \Rightarrow k_1 = a + k_2 \Rightarrow a = k_1 - k_2$. Se verifică (exerciţiu) că $f(x) = x + k_1 - k_2$ realizează izomorfismul. Deci $G_{k_1} \simeq G_{k_2}$. Pentru $k = 0$ avem $x * y = x + y \Rightarrow G_0 = (\mathbf{Z},+)$. În concluzie $G_{k_1} \simeq G_{k_2} \simeq (\mathbf{Z},+)$.

54. Fie $\sigma \in S_n$ permutarea de ordin maxim şi $(c_1,c_2,\ldots,c_r)$ descompunerea sa în cicli de lungime, respectiv, $t_1,t_2,\ldots,t_r$ şi, deci, de ordine $t_1,t_2,\ldots,t_r$ (ordinul unei permutări ciclice este lungimea sa). Fie $p_1,p_2,\ldots,p_m$ toţi divizorii primi ai numerelor $t_1,t_2,\ldots,t_r$. Din teorema fundamentală a aritmeticii

$$t_j = p_1^{k_{1j}} p_2^{k_{2j}} \ldots p_m^{k_{mj}},\ j = \overline{1,r}$$

unde unele puteri pot fi zero. Se ştie că ordinul permutării este cel mai mic multiplu comun al numerelor $t_1,t_2,\ldots,t_r$.

Deci $\operatorname{ord} \sigma = [t_1,t_2,\ldots,t_r] = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_m^{s_m}$ Observăm că ordinul unei permutări nu poate avea ca factor un număr prim mai mare decît $n$ deoarece, în caz contrar, din faptul că ordinul unei permutări divide ordinul lui $S_n$, adică $n!$, ar rezulta că $n!$ are un factor prim mai mare ca $n$ ceea ce este fals.

Să presupunem acum că

$$p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m} \neq \max \left\{ \prod_{i=1}^{l} p_i^{k_i} \,(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_l^{k_l}) \right\} = : B$$

Atunci fie $p_1^{u_1} p_2^{u_2} p_m^{u_m} = B$. Considerăm $\tau$ permutarea care se descompune în cicli de lungimi $p_1^{u_1}, p_2^{u_2}, \dots, p_m^{u_m}$. Atunci ord $\tau >$ ord $\sigma$ ceea ce este în contradicție cu alegerea lui $\sigma$.

**55.** „$\Leftarrow$" Considerăm descompunerile în cicli disjuncți a unei permutări $\sigma$ din $S_{13}$. Notăm $(n_1,n_2,\dots,n_k)$ descompunerea în cicli disjuncți de lungimi $n_1,n_2,\dots,n_k$ cu $(n_i, n_j) = 1$ pentru orice $i < j$, $i,j \in \{1,2,\dots,k\}$ Putem presupune $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \dots n_k \leqslant n_k$.
Conform problemei anterioare ord $\sigma = [n_1,n_2,\dots,n_k]$. Deoarece unele dintre numerele $n_1,n_2,\dots,n_k$ pot fi egale, putem presupune, fără ca ordinul să se modifice, că ele sînt toate distincte și, deci, $n_1 < n_2 < \dots$ $\dots < n_k$.
Să dăm un exemplu. Permutarea de la exercițiul 36 se descompunea în ciclurile (1,7,9), (2,6,3), (4,8) și în sensul lungimilor, care ne interesează avem $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$ adică (2,3,3). Am arătat că, pentru calculul ordinului, putem considera doar lungimile distincte, adică 2 și 3. Ordinul permutării de la exercițiul 36 este 6.

Caz 1. (2,3,5) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
Caz 2. (2,3,7) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$
Caz 3. (2,5) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 2 \cdot 5 = 10$
Caz 4. (3,4,5) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$
Caz 5. (3,5) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 3 \cdot 5 = 15$
Caz 6. (3,7) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 3 \cdot 7 = 21$
Caz 7. (4,5) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 4 \cdot 5 = 20$
Caz 8. (5,6) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 5 \cdot 6 = 30$
Caz 9. (5,7) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 5 \cdot 7 = 35$
Caz 10. (6,7) $\Rightarrow$ ord $\sigma = 6 \cdot 7 = 42$

Deci ordinul maxim este 60. Din modul de calcul al celui mai mic multiplu comun rezultă că putem considera numai numere relativ prime, ceea ce am și făcut.
„$\Rightarrow$" Presupunem că $n = 14$. Considerăm permutarea care se descompune în trei cicli de lungimi 2, 5, 7. Atunci ordinul acestei permutări este $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 > 60$ ceea ce este în contradicție cu ipoteza că ordinul maxim este 60.

**56.** Arătăm că $\cdot$ este asociativă. Fie $y_1,y_2,y_3 \in G_2$ arbitrare. Deoarece $f$ este surjecție rezultă că există $x_1,x_2,x_3 \in G_1$ astfel încît $f(x_i) = y_i$, $i = 1,2,3$. Avem $y_1 \cdot (y_2 \cdot y_3) = f(x_1) \cdot (f(x_2) f(x_3)) = f(x_1) \cdot f(x_2 \circ x_3) =$ $= f(x_1 \circ (x_2 \circ x_3)) = f((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = f(x_1 \circ x_2) \cdot f(x_3) = (f(x_1) \cdot f(x_2)) \cdot f(x_3) =$ $= (y_1 \cdot y_2) \cdot y_3$ și deci $\cdot$ este asociativă.
Arătăm că $\cdot$ admite element neutru. Fie $e_1$ elementul neutru din $G_1$ și notăm $e_2 = f(e_1) \in G_2$. Arătăm că $e_2$ este elementul neutru din $G_2$. Fie $y \in G_2$ arbitrar. Atunci există unic $x \in G_1$ astfel încît $f(x) = y$.

Avem $y \cdot e_2 = f(x) \cdot f(e_1) = f(x \circ e_1) = f(x) = y$ şi $e_2 \cdot y = f(e_1) \cdot f(x) = f(e_1 0 x) = f(x) = y$. Deci $e_2 = f(e_1)$ este elementul neutru pentru $\cdot$.
Arătăm că orice element din $G_2$ este simetrizabil. Fie $y \in G_2$ arbitrar. Atunci există unic $x \in G_1$ astfel încît $f(x) = y$ şi notăm $x'$ simetricul lui $x$ din $G_1$. Avem $e_2 = f(e_1) = f(x \circ x') = f(x) \cdot f(x') = y \cdot f(x') = y \cdot y'$, unde am notat $y' = f(x')$. Mai trebuie demonstrat că $y' \cdot y = e_2$. În adevăr $y' \cdot y = f(x') \cdot f(x) = f(x' \circ x) = f(e_1) = e_2$. Deci simetricul lui $y = f(x)$ există şi este $y' = f(x')$ unde $x'$ este simetricul lui $x$.
Rămîne că $(G_2, \cdot)$ este grup.

**57.** „$\Rightarrow$" Fie $f$ un polinom ireductibil peste $A_1$.
Presupunem prin absurd că $\varphi(f)$ este reductibil peste $A_2$. Atunci există $h_1, g_1 \in A_2[X]$ astfel încît $\varphi(f) = h_1 g_1$. Din $\varphi$ surjecţie rezultă că $(\exists)$ $h, g \in A_1[X]$ astfel încît $\varphi(h) = h_1$ şi $\varphi(g) = g_1$. Avem $\varphi(f) = h_1 g_1 = \varphi(h)\varphi(g) = \varphi(hg)$ şi din $\varphi$ injecţie $\Rightarrow f = hg$ adică $f$ este reductibil peste $A_1$ ceea ce este în contradicţie cu presupunerea că $f$ este ireductibil peste $A_1$.
„$\Leftarrow$" Fie $f \in A_1[X]$ astfel încît $\varphi(f) \in A_2[X]$ este ireductibil peste $A_2$. Presupunem prin absurd că $f$ este reductibil peste $A_1$ adică $(\exists)$ $h, g \in A_1[X]$ astfel încît $f = hg$. Avem $\varphi(f) = \varphi(hg) = \varphi(h)\varphi(g) \Rightarrow \varphi(f)$ este reductibil peste $A_2$ ceea ce este în contradicţie cu presupunerea făcută.
Evident, prin negaţie logică rezultă că $f$ este reductibil peste $A_1$ dacă şi numai dacă $\varphi(f)$ este reductibil peste $A_2$.
Aplicaţie. Presupunem prin absurd că $\mathbf{R}[X] \simeq \mathbf{C}[X]$ şi deci există $\varphi : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{C}[X]$ izomorfism. Fie $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^2 + 1$ care este ireductibil peste $\mathbf{R}$. Din problemă rezultă că $\varphi(f)$ este ireductibil peste $\mathbf{C}$. Dar polinoamele ireductibile peste $\mathbf{C}$ sînt cele de gradul întîiu. Deci grad $\varphi(f) = 1$. Pe de altă parte $\varphi(X^2 + 1) = \varphi(X^2) + \varphi(1) = [\varphi(X)]^2 + 1$ şi deci grad $\varphi(f)$ este cel puţin 2 ceea ce este în contradicţie cu grad $\varphi(f) = 1$.
Rămîne că $\mathbf{R}[X]$ şi $\mathbf{C}[X]$. nu sînt izomorfe.

**58.** Folosim problema anterioară şi criteriul lui Eisenstein.
Fie $\varphi : \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Z}[X]$, $\varphi(f(X)) = f(X + 1)$. Arătăm că $\varphi$ este izomorfism de inele. Dacă $h = f + g$ atunci $\varphi(h(X)) = h(X + 1) = f(X + 1) + g(X + 1)$ şi deci $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$. Analog $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$. Arătăm că $\varphi$ este injecţie. Fie $\varphi(f(X)) = \varphi(g(X)) \Rightarrow f(X + 1) = g(X + 1) \Rightarrow \tilde{f}(t) = \tilde{g}(t)$, $(\forall)\, t \in \mathbf{Z} \Rightarrow f = g$ şi $\varphi$ este injecţie. Arătăm că $\varphi$ este surjecţie. Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$ şi alegem $h(X) = f(X - 1)$. Atunci $\varphi(h(X)) = h(X + 1) = f(X)$ şi deci $\varphi$ este surjecţie. Rămîne că $\varphi$ este izomorfism.
Fie $h(X) = \varphi(f)$ unde $f = X^4 + 4X + 9$. Avem $h(X) = \varphi(f(X)) = f(X + 1) = (X + 1)^4 + 4(X + 1) + 9 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 8X + 14$.
Pentru $p = 2$ sînt verificate condiţiile din criteriul lui Eisenstein (adică $(c(h) = 1$, $p \mid 14$, $p \mid 8$, $p \mid 6$, $p \mid 4$, $p \nmid 1$, $p^2 \nmid 14$, unde $c(h)$ este c.m.m.d.c. al coeficienţilor lui h). Deci $h = \varphi(f)$ este ireductibil, de unde rezultă că $f$ este ireductibil.

**59.** Vom demonstra mai întîi următoarea:
Lemă. Enunţul problemei este adevărat pentru $A = \mathbf{Z}_n$.

Demonstrație. În acest caz numărul $\min\{n \mid n \cdot 1 = 0,\ n > 0\} = m$. Presupunem prin absurd că există $a,b \in \mathbf{N} - \{0,1\}$ astfel încît $ab = m$ și $(a,b) = 1$. Atunci există $u,v \in \mathbf{Z}$ astfel încît $au + bv = 1$. Considerăm elementul $\hat{x} = \widehat{au} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \hat{x} = \widehat{au}$ în $\mathbf{Z}_m$ și avem $\hat{x}(1 - \hat{x}) = \widehat{au}(1 - \widehat{au}) = \widehat{au}\widehat{bv} = \widehat{muv} = \widehat{abuv} = 0$. Deci $\widehat{x} = \widehat{au}$ este soluție a ecuației $x^2 = x$ în $\mathbf{Z}_m$. Arătăm că $x \neq \hat{1}$ și $x \neq \hat{0}$.

Presupunem $\hat{x} = \hat{1} \Rightarrow \widehat{au} = \hat{1} \Rightarrow \widehat{bv} = \hat{0} \Rightarrow bv = mk,\ k \in \mathbf{Z}$
$au + mk = 1 \Rightarrow au + abk = 1 \Rightarrow a(u + bk) = 1 \Rightarrow a/1 \Rightarrow a = 1$
ceea ce este o contadicție.

Presupunem $\hat{x} = \hat{0} \Rightarrow \widehat{au} = 0 \Rightarrow \widehat{au} = mk,\ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow mk + bv = 1$
$bv + abk = 1 \Rightarrow b(v + ak) = 1 \Rightarrow b/1 \Rightarrow b = 1$ contradicție.

Deci ecuația $x^2 = x$ are în $\mathbf{Z}_m$ cel puțin trei soluții $\hat{x} = \hat{0}$, $x = 1$ și $\widehat{x} = \widehat{au}$ ceea ce contrazice ipoteza. Cu aceasta demonstrația lemei este încheiată.

Revenim la rezolvarea problemei. Să notăm cu $c(A)$ numărul $\min\{n \mid n \cdot 1 = 0,\ p > 0\}$. Considerăm mulțimea

$$M = \{0,1,2 \cdot 1,3 \cdot 1,\ldots,(c(A) - 1) \cdot 1\}.$$

Se observă că aplicația $f : \mathbf{Z}_{c(A)} \to M$ definită prin $f(k) = k \cdot 1$ este corect definită și realizează un izomorfism de inele. Deci $A$ conține subinelul $M$ izomorf cu $\mathbf{Z}_{c(A)}$. Dacă ecuația $x^2 = x$ ar avea în $M$ mai mult de două soluții atunci acest lucru s-ar întîmpla în $A$ ceea ce contrazice ipoteza. Concluzia rezultă aplicînd lema.

60. Mai întîi facem următoarea:

Observație. Dacă $A$ este un inel și $b,x,y \in A$ astfel încît $by = yb = 1$ atunci $x = y$ și deci $b$ este inversabil.

Demonstrație. Avem $bx = 1 \Rightarrow ybx = y \Rightarrow x = y$ și deci $bx = xb = 1$ adică $b$ este inversabil și $b^{-1} = x = y$.

Revenim la rezolvarea problemei.

Notăm $b = a + a^2 + \ldots a^n$, (1). Înmulțind la dreapta cu $a$ avem $ba = a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1} \Rightarrow b - ba = a - a^{n+1} \Rightarrow b(1 - a) = a(1 - a^n) \Rightarrow b(1 - a)(1 - a^n)^{-1}a^{-1} = 1$ și notînd $y = (1 - a)(1 - a^n)^{-1}a^{-1}$ avem $by = 1$, (2).

Tot din (1) înmulțind la stînga cu $a$ avem $ab = a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1} \Rightarrow b - ab = a - a^{n+1} \Rightarrow (1 - a)b = a(1 - a^n) \Rightarrow (1 - a^n)^{-1}a^{-1}(1 - a)b = 1$. Notînd $y = (1 - a^n)^{-1}a^{-1}(1 - a)$ avem $yb = 1$, (3). Ținînd seama de (2), (3) și de observație avem $b$ inversibil și

$$b^{-1} = (1 - a)(1 - a^n)^{-1}a^{-1} = (1 - a^n)^{-1}a^{-1}(1 - a)$$

61. Fie funcția $\varphi_{a_1} : G \to G$, $\varphi_{a_1}(x) = xa_1$. Se demonstrează ușor că $\varphi_{a_1}$ este bijecție. Demonstrăm că $a_1a_n = a_na_1$. Fie $y = a_1a_n$ și să presupunem că $y \neq a_na_1$. Din $y \in G$ și $\varphi_{a_1}$ surjecție rezultă că $(\exists)j \in \{1,2,\ldots,n - 1\}$ astfel încît $y = \varphi_{a_1}(a_j) = a_ja_1$. Avem $a_1a_j = a_ja_1 = a_1a_n \Rightarrow a_j = a_n$ ceea ce este imposibil.

Repetînd procedeul pentru $a_2,a_3,\ldots,a_n$ rezultă concluzia.

**62.** a) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ și deci

$$M = \{E, A, A^2, A^3\}.$$

b) Din $A^2 = E$ rezultă următorul tablou al operației

| | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $A$ | $A$ | $E$ | | |
| $B$ | $B$ | | | |
| $C$ | $C$ | | | |

Se știe că pe orice linie și orice coloană a tablei operației unui grup un element apare o dată și numai o dată.

Deci $AB = C$, $AC = B$, $BA = C$, $CA = B$. Fie $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Din $AB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow x = a$, $y = b$ $z + c = 0$, $t + d = 0$ (1),

Din $AC = B$ rezultă tot (1)

Din $AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -t \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$ și $z = 0$ (2).

Din $AC = CA \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0$ și $c = 0$ (3)

Din (1), (2) și (3) avem deocamdată $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$

În acest fel s-a completat linia și coloana lui $A$. Avem de completat $B^2$ moment în care apar două cazuri.

Caz. 1. $B^2 = E$. Avem $B^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 = 1$ și $t^2 = 1 \Rightarrow$ ($x = 1$ și $t = 1$) sau ($x = 1$ și $t = -1$) sau ($x = -1$ și $t = 1$) sau ($x = -1$ și $t = -1$). Deoarece $B \neq A$ și $B \neq E$ avem

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sau $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Caz 1.1. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Se verifică $BC = A = CB$ și $C^2 = E$

și deci $M = \left\{E, A, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

Caz 1.2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se verifică $BC = A = CB$ și $C^2 = E$

și deci $M = \left\{E, A, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Caz 2. $B^2 = A$. Avem $B^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 = 1$ şi $t^2 = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x = 1$ şi $t = i)$ sau $(x = 1$ şi $t = -i)$ sau $(x = -1$ şi $t = i)$ sau $(x = -1$ şi $t = -i)$. Se obţin următoarele mulţimi

$$M = \left\{E, A, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\}$$

$$M = \left\{E, A, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}$$

$$M = \left\{E, A, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\}$$

$$M = \left\{E, A, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}$$

Se observă că se obţin doar trei mulţimi distincte.

Verificaţi care dintre soluţii sînt grupuri izomorfe cu $\mathbf{Z}_4$ şi care sînt izomorfe cu grupul lui Klein, ştiut fiind faptul că există doar două tipuri de grupuri cu 4 elemente neizomorfe.

**63.** Fie ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, (1), cu $a,b,c, \in K$, unde $K$ este un corp comutativ de caracteristică diferită de 2. Atunci formula de rezolvare a ecuaţiei (1) este similară cu formula de rezolvare a ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi reali.

Mai precis, ecuaţia (1) are rădăcinile $x_1 = (-b + t)(2a)^{-1}$ şi $x_2 = (-b - t)(2a)^{-1}$ unde $t \in K$ astfel încît $t^2 = b^2 - 4ac$.

În cazul ecuaţiei noastre avem $t^2 = \widehat{35}^2 - 4 \cdot \widehat{35} = \widehat{12} \Rightarrow t = \hat{7}$ şi $2a = 2 \Rightarrow (2a)^{-1} = \hat{2}^{-1} = \widehat{19}$. Avem $x_1 = (-\widehat{35} + \hat{7}) \cdot \widehat{19} = (\hat{2} + \hat{7}) \cdot \widehat{19} = \hat{9} \cdot \widehat{19} = \widehat{23}$ şi $x_2 = (-\widehat{35} - \hat{7}) \cdot \widehat{19} = -\hat{5} \cdot \widehat{19} = \widehat{16}$.

Rămîne că $x_1 = \widehat{23}$ şi $x_2 = \widehat{16}$ sînt soluţiile ecuaţiei date.

**64.** Fie $H \subset \mathbf{Q}$ un subgrup propriu al lui $(\mathbf{Q}, +)$ şi să presupunem că există un izomorfism $f: \mathbf{Q} \to H$. Se ştie că un astfel de izomorfism este de forma $f(x) = ax$ unde $a = f(1) \neq 0$. Deoarece $H$ este parte proprie a lui $\mathbf{Q}$ deducem că $(\exists)\ b \in \mathbf{Q} - H$ şi deci avem $f(x) \neq b$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q}$ adică $ax \neq b$, $(\forall)\ x \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \neq \frac{b}{a}$ pentru orice $x \in \mathbf{Q} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{b}{a} \notin \mathbf{Q}$ ceea ce este absurd.

**65.** Notăm relaţia dată în enunţ cu $(\cdot)$

Fie $a,b \in A$ arbitrare. Vom arăta că $ab = ba$.

În $(\cdot)$ punem $x = a$ şi $y = b$ şi avem $(a^2 - a)\, b = b\,(a^2 - a) \Rightarrow a^2b - ab = ba^2 - ba$ (1).

În $(\cdot)$ punem $x = b$ şi $y = b$ şi avem $(b^2 - b)\, a = a\,(b^2 - b) \Rightarrow b^2a - ba = ab^2 - ab$.

În $(\cdot)$ punem $x = a + b$ și $y = b$ și avem $((a + b)^2 - (a + b))b =$
$= b((a + b)^2 - (a + b)) \Rightarrow (a^2 + ab + ba + b^2 - a - b)\, b = b(a^2 -$
$+ ab + ba + b^2 - a - b) \Rightarrow a^2b + ab^2 - ab = ba^2 + b^2a - ba$ (2) ș
ținînd seama de (1) obținem $ab^2 = b^2a$ (3). Analog $ba^2 = a^2b$ (4)
Utilizînd (3) și (4) în (2) avem $a^2b + ab^2 - ab = ba^2 + b^2a - ba =$
$\Rightarrow - ab = - ba \Rightarrow ab = ba$ și deci $A$ este comutativ.

66. $a \Rightarrow b$. Din $a^2 = -1 \Rightarrow aa = -1 \Rightarrow (-a)\, a = 1 \Rightarrow a$ este inversabil
și $a^{-1} = -a$ (1). Tot din $a^2 = -1 \Rightarrow (-a)\,(-a) = -1$ și deoarece
este unic $\Rightarrow a = -a \Rightarrow a + a = 0 \Rightarrow a\,(1 + 1) = 0 \Rightarrow 1 + 1 = 0 =$
$\Rightarrow 1 = -1 \Rightarrow 1^2 = 1 = -1$. Din $a^2 = -1$ și $1^2 = -1$ și a unic re-
zultă $a = 1$. Afirm că $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Fie $x^2 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + 1 =$
$= x^2 + x\,(1 + 1) + 1 + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = -1$ și cum există un
singur element cu această proprietate $\Rightarrow x + 1 = a = 1 \Rightarrow x = 0$.
Deci $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, (3. Fie $f : A \to A$, $f(x) = x^2$. Afirm că $f$ este
injecție. Fie $x,y \in A$ astfel încît $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2$ și $(x - y)^2 =$
$= x^2 - xy\,(1 + 1) + y^2 = x^2 + y^2 = x^2 + x^2 = x^2\,(1 + 1) = 0$.
Deci $(x - y)^2 = 0$ și din (3) $\Rightarrow x - y = 0 \to x = x$ și deci $f$ este
injecție. Cum $f : A \to A$ este injecție și $A$ este finită rezultă că $f$ este
și surjecție adică $(\forall)\, a \in A\ (\exists)\, b \in A$ astfel încît $f(b) = a \Rightarrow b^2 =$
$= a$ c.c.t.d.
$b \Rightarrow a$. Deci $1 + 1 = 0$ (4) și $(\forall)\, a \in A\ (\exists)\, b \in A$ astfel încît $a = b^2$ (5)
Din (5) pentru $a = -1 \Rightarrow (\exists)\, b \in A$ astfel încît $-1 = b^2$. Considerăm
$f : A \to A$, $f(x) = x^2$. Din (5) rezultă că $f$ este surjecție și deoarece
$A$ este finită $\Rightarrow f$ injecție. Presupunem prin absurd că $(\exists)\, \beta \in A$ astfel
încît $\beta^2 = -1$. Deci $\beta^2 = b^2 \Rightarrow f(\beta) = f(b)$ și cum $f$ este injecție
$\Rightarrow b = \beta$ ceea ce arată că există un unic element că proprietatea $x^2 =$
$= -1$.
Cazul $A = \mathbf{Z}_2[X]$.
a) Fie $f$ cu proprietatea $f^2 + 1 = 0 \Rightarrow (f + 1)^2 = f^2 + f(1 + 1) +$
$+ 1 = f^2 + 1 = 0 \Rightarrow f + 1 = 0 \Rightarrow f = 1$ și $f$ este unic.
*b*) Este falsă deoarece polinoamele de grad impar din $\mathbf{Z}_2[X]$ nu pot
fi pătrate de polinoame. Întradevăr fie $f = X^3$. Presupunem că $(\exists)$
$g \in \mathbf{Z}_2[X]$ cu grad $g = n$ astfel încît $g^2 = f$. Din $g = a_0X^n + a_1X^{n-1} +$
$\ldots + a_n$ cu $a_0 \neq 0$ și deoarece $a_0 \in \mathbf{Z}_2$ rezultă $a_0 = 1$. Avem $g^2 = a_0^2X^{2n} +$
$+ \ldots$ și din $a_0^2 = 1$ rezultă grad $g^2 = 2n$ și deoarece grad $f = 3$ ar
rezulta $2n = 3$ ceea ce este imposibil.

67. Fie $m \in G - M$, deci $m \in G$ și $m \notin M$. Fie $a \in G$ arbitrar. Considerăm
$b = am^{-1}$. Afirm că $a \notin \{by \mid y \in M\}$ adică $a \neq by$, $(\forall)\, y \in M$.
Presupunem prin absurd că $(\exists) y \in M$ astfel încît $a = by \Rightarrow a =$
$= am^{-1}y \Rightarrow m^{-1}y = e \Rightarrow y = m \Rightarrow m \in M$ ceea ce este în contradicție
cu alegerea lui $m$.

68. a) Presupunem prin absurd că $(\exists)\, y \in G - \{e\}$ astfel $y^2 = e$. Fie
$x$ arbitrar $\Rightarrow xe = ex \Rightarrow xe = e^2x \Rightarrow xy^2 = e^2x$ și din proprietatea din
enunț rezultă $y = e$ ceea ce este în contradicție cu $y \in G - \{e\}$.
b) Fie $a,b \in G$ arbitrare. Trebuie demonstrat că $ab = ba$.
Alegem $x = a$, $y = ba$, $z = ab$. Avem $xy^2 = xyy = ababa$ și $z^2x =$
$= zzx = ababa$ și deci, $xy^2 = z^2x \Rightarrow y = z \Leftrightarrow ab = ba$.
c) Fie $x,y,z \in G$ astfel încît $xy^2 = z^2x$. Trebuie arătat că $y = z$.
Avem $xy^2 = z^2x \Rightarrow xy^2 = xz^2 \Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow y^2\,(z^{-1})^2 = e \Rightarrow (yz^{-1})^2 =$
$= e$ și din a) rezultă $yz^{-1} = e \Rightarrow y = z$.

**69.** a) Avem echivalențele succesive: $a_n \mid a_m \Leftrightarrow (a_n,a_m) = a_n \Leftrightarrow a_{(n,m)} = a_n \Leftrightarrow (n,m) = n \Leftrightarrow n \mid m$

b) Construim șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ în mod recursiv astfel $b_1 = a_1$, iar dacă $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sînt cunoscuți, atunci $b_n = \dfrac{a_n}{\prod\limits_{\substack{d \mid n \\ d<n}} b_d}$.

Unicitatea lui $(b_n)$ $n \geq 1$ se demonstrează prin inducție. Mai precis, dacă $(c_n)_{n\geq 1}$ ar fi un alt șir de numere raționale care satisface $a_n = \prod\limits_{d\mid n} c_d$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$ atunci $c_1 = a_1 = b_1$ și dacă presupunem $c_i = b_i$ pentru $i = 1,2,\ldots,n-1$ rezultă

$$c_n = \frac{a_n}{\prod\limits_{\substack{d/n \\ d<n}} c_n} = \frac{a_n}{\prod\limits_{\substack{d/n \\ d<n}} b_d} = b_n.$$

Să arătăm acum că dacă $(b_n)_{n\geq 1}$ e un șir de numere naturale atunci el are proprietatea $(q)$. Pentru aceasta vom proba că dacă $p,m \in \mathbf{N}^*$ sînt astfel încît $n$ nu divide $m$ și $m$ nu divide $n$, atunci $(b_n,b_m) = 1$. Fixînd ideile, să zicem că $n<m$. Întrucît $n$ nu divide $m$ avem $(n,m)<n$ și deci dacă $d\mid(n,m)$ rezultă $d \mid n$ și $d < n$. Prin urmare $b_n = \dfrac{a_n}{\prod\limits_{\substack{d \mid n \\ d<n}} b_d}$ divide $\dfrac{a_n}{\prod\limits_{d \mid (n,m)} b_d} = \dfrac{a_n}{a_{(n,m)}} = \dfrac{a_n}{(a_n,a_m)}$ și analog, $b_m$ divide $\dfrac{a_m}{(a_n,a_m)}$. Dar atunci $(b_n,b_m)$ divide $\left(\dfrac{a_n}{(a_n,a_m)}\right), \left(\dfrac{a_m}{(a_n,a_m)}\right) = 1$, adică $(b_n,b_m) = 1$.

c) Fie $n,m \in \mathbf{N}^*$ și să arătăm că $(a_n,a_m) = a_{(n,m)}$. Avem $a_n = \prod\limits_{d\mid n} b_d =$

$$= \prod_{(d\mid n,m)} b_d \cdot \prod_{\substack{d \mid n \\ d\nmid m}} b_d,$$

$$a_m = \prod_{d\mid m} b_d = \prod_{d \mid (n,m)} b_d \cdot \prod_{\substack{d \mid m \\ d\nmid n}} b_d$$

de unde $(a_n,a_m) = \prod\limits_{d \mid (n,m)} b_d \cdot \left(\prod\limits_{\substack{d \mid n \\ d\nmid m}} b_d,\ \prod\limits_{\substack{\delta \mid m \\ \delta\nmid n}} b_\delta\right)$ (1)

Dar pentru orice $d,\delta$ cu proprietățile $d \mid n$, $d\nmid m$ și $\delta \mid m$, $\delta\nmid n$ avem $d\nmid\delta$ și $\delta\nmid d$ (căci dacă de exemplu am avea prin absurd $d \mid \delta$, cum $\delta \mid m$, ar însemna $d \mid m$, fals). Atunci întrucît $(b_n)$ $n\geq 1$ are proprietatea $q$) rezultă $(b_d,b_\delta) = 1$, deci și

$$\left(\prod_{\substack{d \mid n \\ d\nmid m}} b_d,\ \prod_{\substack{\delta \mid m \\ \delta\nmid n}} b\right) = 1.$$

înlocuind în (1) obținem $(a_n,a_m) = \prod\limits_{d\mid(n,m)} b_d = a_{(n,m)}$

*Conjectură* formulată de autorul problemei.

Șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ de la punctul b) este întotdeauna un șir de numere naturale.

**70.** a) Avem echivalențele succesive $G_n \subset G_m \Leftrightarrow G_n \cap G_m = G_n \Leftrightarrow G_{(n,m)} = G_n \Leftrightarrow (n,m) = n \Leftrightarrow n \mid m$.

b) Definim $H_n = G_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i$ pentru $n \geqslant 2$ și $H_1 = G_1$ și arătăm că $(H_n)_{n\geq 1}$ este un șir cu proprietatea $(q)$ ce satisface relația $G_n = \bigcup_{d\mid n} H_d$. Faptul că $(H_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea $(q)$ îl probăm astfel. Fie $n,m \in \mathbf{N}^*$, cu $n \neq m$, de exemplu $n < m$. Din definiția lui $H_n$ se vede că $H_n \subset G_n$. Dacă ar exista, prin absurd, un element $\alpha \in H_n \cap H_m$ am avea $\alpha \in H_n \subset \subset G_n$ pe de o parte, iar pe de altă parte $\alpha \in H_m = G_m - \bigcup_{i=1}^{m-1} G_i$, deci $\alpha \in G_n$, contradicție. Așadar $H_n \cap H_m = \emptyset$ pentru $n \neq m$. Egalitatea $G_n = \bigcup_{d\mid n} H_d$ o vom proba prin dublă incluziune. Mai întîi este clar că pentru orice $d$ divizor al lui $n$ avem $G_d \cap G_n = G_{(d,n)} = G_d$ adică $G_d \subset G_n$ și atunci cu atît mai mult $H_d \subset G_n$ (căci $H_d \subset G_d$), de unde rezultă că $\bigcup_{d\mid n} H_d \subset G_n$. Pentru a stabili cealaltă incluziune, considerăm $\alpha \in G_n$ un element arbitrar și vom arăta că există un divizor $d$ al lui $n$ cu proprietatea că $\alpha \in H_d$. Într-adevăr, fie $d$ cel mai mic număr natural pentru care $\alpha \in G_d$ (este clar că $d \leqslant n$, întrucît $\alpha \in G_n$). Atunci $\alpha \notin G_1, G_2, \ldots, G_{d-1}$ adică $\alpha \in G_d - \bigcup_{i=1}^{d-1} G_i = H_d$. Fie $\delta = (d,n)$. Cum $\alpha \in G_d \cap G_n = G_\delta$ rezultă conform alegerii lui $d$, că avem $\delta \geqslant d$. Pe de altă parte, $\delta \mid d$, deci $\delta \leqslant d$. Așadar $\delta = d$, adică $(d,n) = d$, ceea ce însamnă că $d \mid n$. Prin urmare am găsit $d$ divizor al lui $n$ cu $\alpha \in H_d$, deci cu atît mai mult $\alpha \in \bigcup_{d\mid n} H_d$ și astfel avem și incluziunea $G_n \subset \bigcup_{d\mid n} H_d$.

Pentru a proba unicitatea șirului $(H_n)_{n\geq 1}$ cu aceste proprietăți, să presupunem că mai avem un șir $(K_n)_{n\geq 1}$ cu aceleași proprietăți, adică având proprietatea $(q)$ și astfel încît $G_n = \bigcup_{d\mid n} K_d$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$. Avem $K_1 = G_1 = H_1$ și dacă admitem că avem $K_i = H_i$, $i = 1,2,\ldots,n-1$ atunci rezultă $K_n = H_n$, deoarece

$$K_n = G_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i\right) = G_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} H_i\right) = H_n$$

în acest fel am demonstrat prin inducție că avem $K_n = H_n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Pentru $n, m \in \mathbf{N}^*$ avem $G_n \cap G_m = \left(\bigcup_{d\mid n} H_d\right) \cap \left(\bigcup_{\delta\mid m} H_\delta\right) = \bigcup_{\substack{d\mid n \\ \delta\mid m}} (H_d \cap H_\delta) =$

$= \bigcup_{d\mid (n,m)} H_d = G_{(n,m)}$ unde am ținut seama că o mulțime de tipul $H_d \cap H_\delta$ este nevidă dacă și numai dacă $d = \delta$ și cum $d \mid n$, iar $\delta \mid m$, înseamnă că această intersecție este de tipul $H_d \cap H = H_d$ cu $d$ divizor pentru $(n,m)$.

d) În relația $G_n = \bigcup_{d/n} H_d$ trecînd la cardinale se obține

$$n = |G_n| = \sum_{d/n} |H_d|.$$

Este clar că $|H_1| = |G_1| = 1 = \varphi(1)$ şi dacă presupunem că $|H_i| = \varphi(i)$ pentru $i = 1,2,\ldots,n-1$ atunci folosind şi relaţia lui *Gauss* $n = \sum_{d/n} \varphi(d)$, vom putea scrie

$$n = \sum_{d|n} |H_d| = \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} |H_d| + |H_n| = \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \varphi(d) + |H_n|$$

de unde $|H_n| = n - \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} \varphi(d) = \varphi(n)$. În acest fel am demonstrat prin inducţie egalitatea $|H_n| = \varphi(n)$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$.

c) Arătăm că $\overline{G}_n \cap \overline{G}_m = \overline{G}_{(n,m)}$. Fie $\alpha \in \overline{G}_n \cap G_m$, deci $\alpha^n = 1$ şi $\alpha^m = 1$. Notînd $d = (n,m)$, există $u,v \in \mathbf{Z}$ cu $d = un = vm$ şi atunci $\alpha^d = \alpha^{un+vm} = (\alpha^n)^u (\alpha^m)^v = 1$, adică $\alpha \in \overline{G}_d = \overline{G}_{(n,m)}$.
Reciproc, dacă $\alpha \in \overline{G}_{(n,m)} = \overline{G}_d$ avem $\alpha^d = 1$ şi cum $d \mid n$ şi $d \mid m$, cu atît mai mult vom avea $\alpha^n = 1$, $\alpha^m = 1$, adică $\alpha \in \overline{G}_n \cap \overline{G}_m$. Din cele două incluziuni rezultă egalitatea dorită, deci $(G_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea $(\dot{p})$. Ţinînd seama de construcţia de la punctul b) avem $H_n = \overline{G}_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i = \{\alpha \in C \mid \alpha^n = 1$ şi $\alpha^i \neq 1,\ i = 1,2,\ldots,n-1\} = \{\alpha \in C \mid \alpha^n = 1$ şi $n$ este minim cu această proprietate$\}$. Mulţimile $G_n$, $H_n$ sînt respectiv mulţimea rădăcinilor de ordinul $n$ ale unităţii şi mulţimea rădăcinilor primitive de ordin $n$ ale unităţii.

f) Din b) şi e) rezultă egalitatea $\overline{G}_n = \bigcup_{d|n} \overline{H}_d$. Cum $G_n$ este mulţimea rădăcinilor polinomului $X^n - 1$, iar $H_n$ este mulţimea rădăcinilor polinomului $F_n$ (numit al n-lea polinom ciclotomic) întrucît mulţimile $H_d$ sînt două cîte două disjuncte, vom putea scrie $X^n - 1 = \prod_{d|n} F_d(X)$ ceea ce încheie soluţia problemei.

(Această egalitate polinomială este atribuită lui Dedekind)

**71.** Fie $a$ o rădăcină a ecuaţiei date, $a \in \mathbf{Z}$, $\Rightarrow a^4 - 10a^3 - (m+1)a^2 + m = 0 \Rightarrow a^4 - 10a^3 - a^2 = m(a^2 - 1) \Rightarrow a^2(a^2 - 1) - 10a^3 + 10a - 10a = m(a^2 - 1) \Rightarrow a^2(a^2 - 1) - 10a(a^2 - 1) - 10a = m(a^2 - 1)$.

Dacă $a = 1 \Rightarrow -10 = 0$ ceea ce este absurd.

Dacă $a = -1 \Rightarrow 10 = 0$ ceea ce este absurd.

Pentru $a \neq 1$ şi $a \neq -1$ împărţim cu $a^2 - 1$ şi avem

$$a^2 - 10a - \frac{10a}{a^2 - 1} = m.$$

Deoarece $a,m \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{10a}{a^2 - 1} \in \mathbf{Z}$ şi fie $\frac{10a}{a^2 - 1} = k \Rightarrow 10a = ka^2 - k \Rightarrow a(10 - ka) = -k \Rightarrow a \mid k \Rightarrow k = ak_1$, $k_1 \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{10a}{a^2 - 1} = ak_1$

şi deci $a = 0$ sau $\frac{10}{a^2 - 1} = k_1$.

Pentru $a = 0 \Rightarrow m = 0$.

Din $\dfrac{10}{a^2 - 1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow a^2 - 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

Avem 1) $a^2 - 1 = 1 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm \sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$.

2) $a^2 - 1 = -1 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$.

3) $a^2 - 1 = 2 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm \sqrt{3} \notin \mathbf{Z}$.

4) $a^2 - 1 = -2 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow a \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.

5) $a^2 - 1 = 5 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \pm \sqrt{6} \notin \mathbf{Z}$.

6) $a^2 - 1 = -5 \Rightarrow a^2 = -4 \Rightarrow a \notin \mathbf{R}$.

7) $a^2 - 1 = 10 \Rightarrow a^2 = 11 \Rightarrow a = \pm \sqrt{11} \notin \mathbf{Z}$.

8) $a^2 - 1 = -10 \Rightarrow a^2 = -9 \Rightarrow a \notin \mathbf{R}$.

Deci singurul caz posibil este $a = 0 \Rightarrow m = 0$.
Pentru $m = 0$ ecuaţia devine: $x^4 - 10x^3 - x^2 = 0$ cu rădăcinile

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 5 + \sqrt{26},\ x_4 = 5 - \sqrt{26}.$$

72. Condiţii necesare $x \neq 0$ şi $y \neq 0$. Ecuaţia se scrie

$$x^2y + y + xy^2 - 2x - mxy = 0.$$

Dînd factor pe $x$ avem $x(xy + y^2 - 2 - my) = -y \Rightarrow x \mid y$.
Dînd factor pe $y$ avem $y(x^2 + 1 + xy - mx) = 2x \Rightarrow y \mid 2x$.
Din $x \mid y \Rightarrow y = k_1x$, $k_1 \in \mathbf{Z}$. Din $y \mid 2x \Rightarrow 2x = k_2y$, $k_2 \in \mathbf{Z}$ şi deci $2xy = k_1k_2xy \Rightarrow k_1k_2 = 2$. Avem următoarele cazuri:
Caz 1. $k_1 = 1$ şi $k_2 = 2 \Rightarrow x = y$ şi ecuaţia devine

$$\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^2 - 2}{x} = m \Rightarrow 2x^2 - mx - 1 = 0$$

cu $\Delta = m^2 + 8$. Din $x \in \mathbf{Z}$ rezultă că în mod necesar $m^2 + 8 = k^2$, $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k^2 - m^2 = 8 \Rightarrow (k - m)(k + m) = 8$ cu următoarele posibilităţi:

1) $k - m = 1$ şi $k + m = 8 \Rightarrow 2k = 9 \Rightarrow k \notin \mathbf{Z}$.

2) $k - m = 2$ şi $k + m = 4 \Rightarrow k = 3$ şi $m = 1$ şi ecuaţia devine $2x^2 - x - 1 = 0$ cu soluţia întreagă $x = 1$.
Se obţine $m = 1$, $x = y = 1$, (1).

3) $k - m = 4$ şi $k + m = 2 \Rightarrow k = 3$ şi $m = -1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$ cu soluţia întreagă $x = -1$.
Se verifică $m = -1$, $x = y = -1$, (2).

4) $k - m = 8$ şi $k + m = 1 \Rightarrow 2k = 9 \Rightarrow k \notin \mathbf{Z}$.

5) $k - m = -1$ şi $k + m = -8 \Rightarrow 2k = -9 \Rightarrow k \notin \mathbf{Z}$.

6) $k - m = -2$ şi $k + m = -4$ se regăseşte (2).

7) $k - m = -4$ și $k + m = -2$ se regăsește (1).

8) $k - m = -8$ și $k + m = -1 \Rightarrow 2k = -9 \Rightarrow k \notin \mathbf{Z}$.

Caz 2. $k_1 = 2$ și $k_2 = 1 \Rightarrow y = 2x$ și ecuația devine $3x = m$ și deci $m = 3p$.

Se verifică $m = 3p$, $x = p$, $y = 2p$, $p \in \mathbf{Z}$.

Caz 3. $k_1 = -1$ și $k_2 = -2 \Rightarrow y = -x$ și ecuația devine

$$\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x^2 - 2}{-x} = m \Rightarrow mx = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{m}$$

și deoarece $x \in \mathbf{Z} \Rightarrow m \in \{\pm 1, \pm 3\}$.

1) $m = 1$. Se verifică $m = 1$, $x = 3$, $y = -3$, (4).

2) $m = -1$. Se verifică $m = -1$, $x = -3$, $y = 3$, (5).

3) $m = 3$. Se verifică $m = 3$, $x = 1$, $y = -1$, (6).

4) $m = -3$. Se verifică $m = -3$, $x = -1$, $y = 1$, (7).

Caz 4. $k_1 = -2$ și $k_2 = -1 \Rightarrow y = -2x$ și ecuația devine

$$\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{4x^2 - 2}{-2x} = m \Rightarrow x^2 + mx - 2 = 0$$

cu $\Delta = m^2 + 8$ și deoarece în mod necesar $m^2 + 8 = k^2 \Rightarrow k^2 - m^2 = 8 \Rightarrow (k - m)(k + m) = 8$ cu următoarele posibilități:

1) $k - m = 1$ și $k + m = 8 \Rightarrow 2k = 9 \Rightarrow k \notin \mathbf{Z}$.

2) $k - m = 2$ și $k + m = 4 \Rightarrow k = 3$ și $m = 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ și $x = -2$.

Se verifică $m = 1$, $x = 1$, $y = -2$, (8), și

$m = 1$, $x = -2$, $y = 4$, (9).

3) $k - m = 4$ și $k + m = 2 \Rightarrow k = 3$ și $m = -1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ și $x = -1$.

Se verifică $m = -1$, $x = 2$, $y = -4$, (10) și

$m = -1$, $x = -1$, $y = 2$, (11).

În celelalte cazuri nu se obțin soluții noi.

**73.** Ecuația se scrie

$2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2x + mx - 2my - y + m = 5 \Leftrightarrow 2x(x - 2y + 1) - y(x - 2y + 1) + m(x - 2y + 1) = 5 \Leftrightarrow (x - 2y + 1)(2x - y + m) = 5$

și deoarece $x - 2y + 1 \in \mathbf{Z}$ și $2x - y + m \in \mathbf{Z}$ și 5 este număr prim avem următoarele posibilități:

Caz 1. $x - 2y + 1 = 1$ și $2x - y + m = 5$. Obținem $x = 2y$ și $3y = 5 - m \Rightarrow y = \frac{5 - m}{3}$ și punem $m = 5 - 3k$.

Se verifică $m = 5 - 3k$, $x = 2k$, $y = k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Caz 2. $x - 2y + 1 = 5$ și $2x - y + m = 1$. Obținem $x = 4 + 2y$ și $3y = -7 - m$ și punem $m = -7 - 3k$.

Se verifică $m = -7 - 3k$, $x = 4 + 2k$, $y = k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Caz 3. $x - 2y + 1 = -1$ și $2x - y + m = -5$. Obținem $x = 2y - 2$ și $3y = -1 - m$ și punem $m = -1 - 3k$.
Se verifică $m = -1 - 3k$, $y = k$, $x = 2k - 2$, $k \in \mathbf{Z}$

Caz 4. $x - 2y + 1 = -5$ și $2x - y + m = -1$. Obținem $x = 2y - 6$ și $3y = 11 - m$.
Se verifică $m = 11 - 3k$, $y = k$, $x = 2k - 6$, $k \in \mathbf{Z}$.

74. Fie $\frac{mx^2 + p}{x^2 + m} = k \Rightarrow mx^2 + p - kx^2 - mk = 0 \Rightarrow x^2 (m - k) = -mk - p$.

Caz. 1 $m - k = 0 \Leftrightarrow mk - p = 0$ și deci $m = k \Leftrightarrow p = m^2$ și funcția devine $f(x) = \frac{mx^2 + m^2}{x^2 + m} = \frac{m(x^2 + m)}{x^2 + m} = m$ și deci $Im\, f = \{m\}$

Caz 2. $m - k \neq 0 \Leftrightarrow p \neq mk$ și $x^2 = \frac{mk - p}{m - k}$.

Caz 2.1. $\frac{p}{m} < m$. Obținem urmtăorul tablou

| $k$ | | $\frac{p}{m}$ | | $m$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $mk - p$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $-k + m$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\frac{mk - p}{m - k}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $-$ |

Deci $k \in \left[\frac{p}{m}, m\right) \Rightarrow \text{Im} = \left[\frac{p}{m}, m\right)$.

Caz. 2.2. $\frac{p}{m} > m$. Obținem următorul tablou

| $k$ | | $m$ | | $\frac{p}{m}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $mk - p$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $m - k$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $\frac{mk - p}{m - k}$ | $-$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ |

Deci $k \in \left(m, \frac{p}{m}\right] \Rightarrow Im\, f = \left(m, \frac{p}{m}\right]$.

75. Încercăm să demonstrăm că $f$ este injecție. Trebuie demonstrat că că $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ sau echivalent, din $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Caz 1. $x, y \in (-\infty, 0]$. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow 3x - 1 = 3y - 1 \Rightarrow x = y$.

Caz 2. $x \in (-\infty, 0], y \in (0, \infty)$. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow 3x - 1 = y + 1 \Rightarrow y = 3x - 2$. Din $y > 0 \Rightarrow 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$ ceea c este în contradicție cu $x \leqslant 0$.

Caz. 3. $x \in (0, \infty)$, $y \in (-\infty, 0]$ este analogul cazului 2.

Caz 4. $x, y \in (0, \infty)$. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$.

Deci în toate cazurile posibile, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Rămîne $f$ este injecție.

76. Încercăm să demonstrăm că $f$ este injecție.

Caz 1. $x, y, \in (-\infty, 0]$. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x^2 - 1 = 2y^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y^2$ și din $x, y \in (-\infty, 0] \Rightarrow x = y$.

Caz 2. $x \in (-\infty, 0], y \in (0, \infty)$. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x^2 - 1 = 2 - y \Rightarrow y = 3 - 2x^2$. Această relație este posibilă. De exemplu pentru $x = -1 \Rightarrow y = 1$. Deci $-1 \neq 1$ și $f(-1) = 1 = f(1)$.

Rămîne că $f$ nu este injecție.

77. Încercăm să demonstrăm că $f$ este surjecție. Fie $y \in \mathbf{R}$.

Caz 1. $x \in (-\infty, 0]$. Avem $f(x) = y \Rightarrow 2x + 1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$

și din $x \leqslant 0 \Rightarrow \frac{y-1}{2} \leqslant 0 \Rightarrow y \leqslant 1$.

Deci pentru $y \in (-\infty, 1] \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$ astfel încît $f(x) = y$, (1).

Caz 2. $x \in (0, \infty)$. Avem $f(x) = y \Rightarrow x - 1 = y \Rightarrow x = y + 1$ și din $x > 0 \Rightarrow y + 1 > 0 \Rightarrow y > -1$.

Deci pentru $y \in (-1, \infty) \Rightarrow x = y + 1$ astfel încît $f(x) = y$, (2)

Din (1) și (2) rezultă $(\forall)\ y \in \mathbf{R}$, $(\exists)\ x \in \mathbf{R}$ astfel ca $f(x) = y$ și deci $f$ este surjecție.

Obs. Pentru $y \in (-1, 1]$ există două valori $x \in \mathbf{R}$, $x = \frac{y-1}{2}$ și $x = y + 1$, astfel încît $f(x) = y$.

78. Încercăm să demonstrăm că $f$ este surjecție. Trebuie demonstrat că pentru orice $y \in \mathbf{R}$ există $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = y$.

Fie $y \in \mathbf{R}$ fixat.

Caz 1. $x \in (-\infty, 0]$. Avem $f(x) = y \Rightarrow 2x - 1 = y \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$

și din $x \leqslant 0 \Rightarrow \frac{y+1}{2} \leqslant 0 \Rightarrow y \leqslant -1$.

Deci pentru $y \in (-\infty, -1] \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$ astfel încît $f(x) = y$, (1)

Caz 2. $x \in (0, \infty)$. Avem $f(x) = y \Rightarrow x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1$ și din $x > 0$ avem $y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$.

Deci pentru $y \in (1, \infty) \Rightarrow x = y - 1$ astfel încît $f(x) = y$, (2).
Din (1) și (2) rezultă că pentru orice $y \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ există $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = y$ și deci, pentru $y \in (-1, 1]$ nu există $x \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = y$.
Rămîne că $f$ nu este surjecție.

**79.** Reamintim că $f$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ $f$ este bijectivă. Arătăm că $f$ este injecție. Caz 1. $x, y \in (-\infty, 0]$. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x^2 + 1 = 2y^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y^2$ și din $x, y \leqslant 0 \Rightarrow x = y$.
Caz 2. $x \in (-\infty, 0], y \in (0, \infty)$. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x^2 + 1 = 1 - y \Rightarrow 2x^2 = -y$, relație care este imposibilă, deoarece membrul stîng este pozitiv, iar membrul drept este strict negativ.
Caz 3. $x \in (0, \infty)$, $y \in (-\infty, 0]$. Analog cazului 2.
Caz 4. $x, y \in (0, \infty)$. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow 1 - x = 1 - y \Rightarrow x = y$.
Deci, în toate cazurile posibile, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ și rămîne că $f$ este injecție.
Arătăm că $f$ este surjecție. Fie $y \in \mathbf{R}$.

Caz 1. $x \in (-\infty, 0]$. Avem $f(x) = y \Rightarrow 2x^2 + 1 = y \Rightarrow x^2 = \dfrac{y-1}{2}$

și din $x^2 \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant 1$ și $x = -\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}$, (1).

Caz 2. $x \in (0, \infty)$. Avem $f(x) = y \Rightarrow 1 - x = y \Rightarrow x = 1 - y$ și din $x > 0 \Rightarrow 1 - y > 0 \Rightarrow y < 1$, (2).
Din (1) și (2) rezultă $f$ surjecție.
În definitiv, $f$ este bijecție și tot din (1) și (2) avem

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{y-1}{2}} & \text{dacă } y \geqslant 1 \\ 1 - y & \text{dacă } y < 1 \end{cases}$$

**80.** a) Explicitînd modulele avem:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{dacă } x \in \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right) \\ 1 - 2x & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

și

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 3 & \text{dacă } x \in [3, \infty) \\ 3 - x & \text{dacă } x \in (-\infty, 3) \end{cases}$$

Caz 1. $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$. Ecuația devine $1 - 2x + 3 - x = 4 \Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.

Caz 2. $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 3\right)$. Ecuația devine $2x - 1 + 3 - x = 4 \Rightarrow x = 2 \in \left[\dfrac{1}{2}, 3\right)$.

Caz 3. $x \in [3, \infty)$. Ecuația devine $2x - 1 + x - 3 = 4 \Rightarrow 3x = 8$ $x = \frac{8}{3} \notin [3, \infty)$.

Deci soluții $x = 0$ și $x = 2$.

b) Avem $x - 1 = 2x + 3$ sau $x - 1 = -2x - 3 \Leftrightarrow x = -4$ sau $x = -2/3$. Deci soluții $x = -4$ și $x = -2/3$.

c) Avem

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 \text{ dacă } x \in [-2, \infty) \\ -x-2 \text{ dacă } x \in (-\infty, -2) \end{cases}$$

Caz 1. $x \in (-\infty, -2)$. Ecuația devine $-x - 2 + 2x = a - 1 \Rightarrow x = a+1$ și din $x \in (-\infty, -2)$ avem $a + 1 \in (-\infty, -2) \Rightarrow a < -3$. Deci $x = a + 1$ cu $a \in (-\infty, -3)$.

Caz 2. $x \in [-2, \infty)$. Ecuația devine $x + 2 + 2x = a - 1 \Leftrightarrow 3x = a - 3 \Rightarrow x = \frac{a-3}{3}$ și din $x \geqslant -2 \Rightarrow \frac{a-3}{3} \geqslant -2 \Rightarrow a - 3 \geqslant -6 \Rightarrow a \geqslant -3$.

Deci $x = \frac{a-3}{3}$ cu $a \in [-3, \infty)$.

**81.** Explicitînd modulele avem

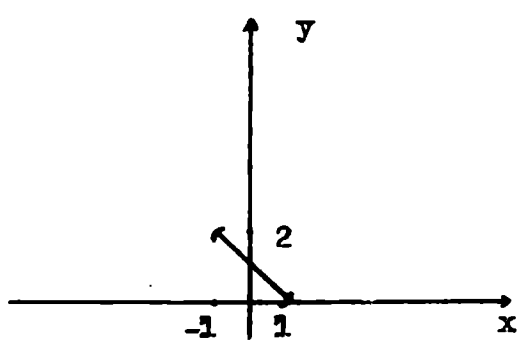
$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ dacă } x \geqslant 1 \\ 1 - x \text{ dacă } x < 1 \end{cases}$$

și

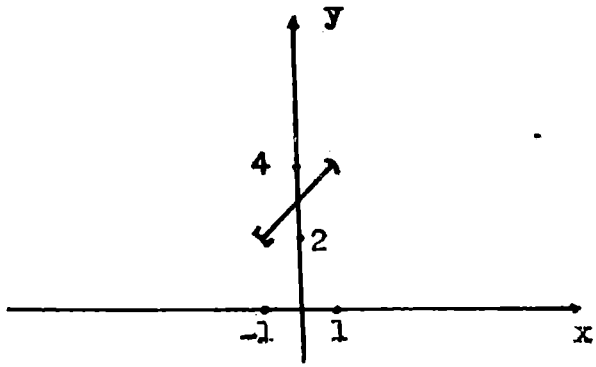
$$|y - 2| = \begin{cases} y - 2 \text{ dacă } y \geqslant 2 \\ 2 - y \text{ dacă } y < 2 \end{cases}$$

Caz 1. $x \in (-\infty, 1)$.

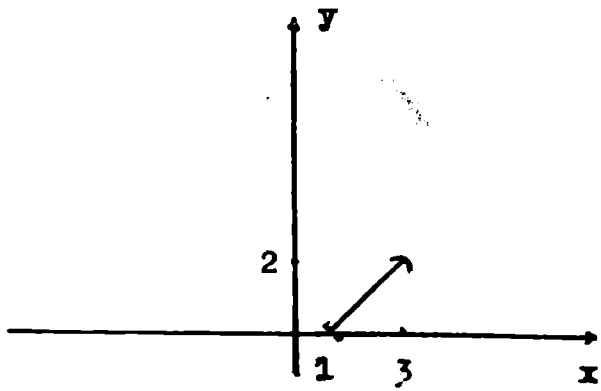
Caz 1.1 $y \in (-\infty, 2)$. Ecuația devine $1 - x - y + 2 = 2$ adică $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Reprezentăm grafic dreapta $y = 1 - x$ și ținem cont că $x \in (-\infty, 1)$ și $y \in (-\infty, 2)$.



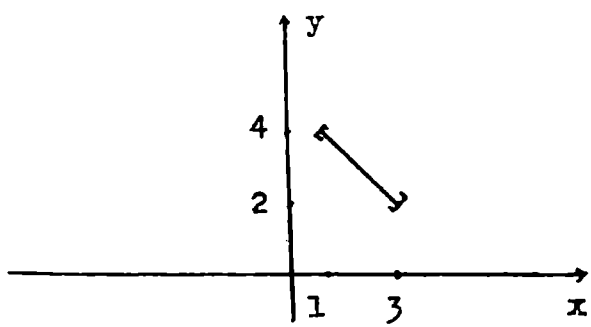
Caz 1.2. $y \in [2, \infty)$. Ecuația devine $1 - x + y - 2 = 2$ de unde $y = x + 3$. Reprezentăm grafic dreapta $y = x + 3$, ținînd cont că $x \in (-\infty, 1)$ și $y \in [2, \infty)$ , și avem



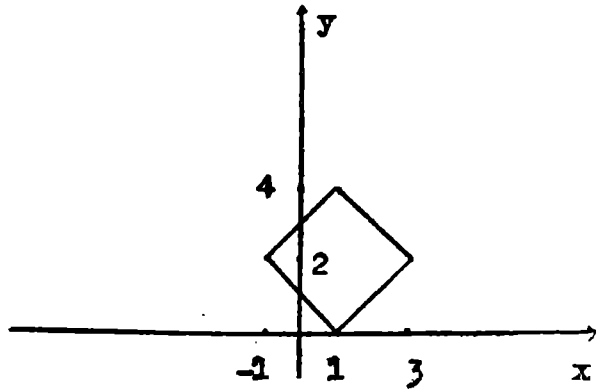

Caz 2. $x \in [1, \infty)$.
Caz 2.1 $y \in (-\infty, 2)$. Ecuația devine $y = x - 1$. Reprezentăm grafic și reținem doar $x \geqslant 1$ și $y \leqslant 2$.




Caz 2.2 $y \in [2, \infty)$. Ecuația devine $x + y - 5 = 0$ pe care o reprezentăm grafic și reținem $x \geqslant 1$ și $y \geqslant 2$.



Reunind cele patru cazuri obținem poligonul soluțiilor




82. Fie $[2x+1]=k_1$ și $[3-x]=k_2$. Avem $k_1 \leqslant 2x+1 < k_1+1$ și $k_2 \leqslant 3-x < k_2+1 \Rightarrow k_1+k_2 \leqslant x+4 < k_1+k_2+2$. Dar $k_1+k_2=4$ și deci $4 \leqslant x+4<6 \Rightarrow 0 \leqslant x<2 \Rightarrow 0 \leqslant 2x<4 \Rightarrow 1 \leqslant 2x+1<5 \Rightarrow [2x+1] \in \{1, 2, 3, 4\}$, (1). Tot din $0 \leqslant x<2 \Rightarrow -2<-x \leqslant 0 \Rightarrow 1<3-x \leqslant 3 \Rightarrow [3-x] \in \{1, 2, 3\}$, (2).

Din (1) și (2) obținem următoarele cazuri:

Caz 1. $[2x+1]=1$. Din ecuația inițială avem $[3-x]=3$. Deci

$$\begin{cases} [2x+1]=1 \\ [3-x]=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant 2x+1<2 \Rightarrow x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 3 \leqslant 3-x<4 \Rightarrow x \in (-1, 0] \end{cases} \Rightarrow x=0, \quad (3)$$

Caz 3. $[2x+1]=2 \Rightarrow [3-x]=2$ și avem sistemul:

$$\begin{cases} 2 \leqslant 2x+1<3 \\ 2 \leqslant 3-x<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ x \in (0,1] \end{cases} \Rightarrow x \in [\frac{1}{2}, 1), \quad (4).$$

Caz 3. $[2x+1]=3 \Rightarrow [3-x]=1$ și deci avem:

$$\begin{cases} 3 \leqslant 2x+1<4 \\ 1 \leqslant 3-x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1, \frac{3}{2}) \\ x \in (1,2] \end{cases} \Rightarrow x \in (1, \frac{3}{2}), \quad (5).$$

Caz 4. $[2x+1]=3 \Rightarrow [3-x]=0$ ceea ce este imposibil, din (2).

Din (3) (4) și (5) avem soluția $x \in \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$.

**83.** a) Condiții necesare de existență

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 3x-2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [2, \infty), \quad (1)$$

Ridicînd relația dată la pătrat avem

$x - 2 + 3x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(3x-2)} = 36 \Rightarrow (x-2)(3x-2) = 20 - 2x$, (2).

Condiție suplimentară $20 - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 10$ și din (1) $\Rightarrow x \in [2, 10]$, (3).

Ridicînd (2) la pătrat avem $(x-2)(3x-2) = 400 - 80x + 4x^2$.

$$x^2 - 72x + 396 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \text{ și } x_2 = 66.$$

Din (3) rezultă soluția unică $x = 6$ care se verifică.

b) Condiție necesară $2x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2$.

Notăm $\sqrt[3]{x+1} = u$ și $\sqrt{2x+4} = v$, $v \geqslant 0$, $\Rightarrow x + 1 = u^3$ și $2x + 4 = v^2$ și după eliminarea lui $x$ avem $v^2 - 2u^3 = 2$ iar din enunț $u + v = 3$. Am obținut sistemul:

$$\begin{cases} v + u = 3 \\ v^2 - 2u^3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ -2u^3 + 9 - 6u + u^2 = 2. \end{cases}$$

Se verifică că ecuația a doua admite singura soluție reală $u = 1 \Rightarrow v = 4$. Avem $\sqrt[3]{x+1} = 1$ și $\sqrt{2x+4} = 4 \Rightarrow x = 0$.

Prin verificare rezultă că $x = 0$ este soluție.

c) Condiții necesare $2x + 5 \geqslant 0$ și $x + 11 \geqslant 0 \Rightarrow x \in [-\frac{5}{2}, \infty)$.

Notăm $\sqrt[4]{2x+5} = u$, $u \geqslant 0$, și $\sqrt{x+11} = v$, $v \geqslant 0$ de unde $2x + 5 = u^4$ și $x + 11 = v^2$ și eliminînd pe $x$ avem $2v^2 - u^4 = 17$ și din enunț obținem $u + v = 10$. Avem deci sistemul:

$$\begin{cases} v + u = 10 \\ 2v^2 - u^4 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 10 - u \\ 2(10-u)^2 - u^4 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 10 - u \\ u^4 - 2u^2 + 40u - 183 = 0 \end{cases}$$

Singura soluție acceptabilă a celei de a doua ecuații este $u = 3 \Rightarrow v = 7$ și deci $2x + 5 = 81$ și $x + 11 = 49$ de unde $x = 38$.

Prin verificare rezultă că $x = 38$ este soluție.

**84.** Din $x_2$ rădăcină a ecuției $x^2 - x + 1 = 0$ rezultă $x_2^2 = x_2 - 1$.

Avem

$$z = \frac{x_1 + 1}{x_2 - 1} = \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{x_2^2 - 1} = \frac{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1}{x_2 - 2} = \frac{3}{x_2 - 2}$$

de unde $z(x_2 - 2) = 3 \Rightarrow x_2 - 2 = \frac{3}{z} \Rightarrow x_2 = \frac{3 + 2z}{z}$. Dar $x_2$ rădăcină a ecuației $x^2 - x + 1 = 0$ și deci

$$\left(\frac{3+2z}{z}\right)^2 - \frac{3+2z}{z} + 1 = 0 \Rightarrow (3+2z)^2 - z(3+2z) + z^2 = 0.$$

După calcule se ajunge la $z^2 + 3z + 3 = 0$.

**85.** Notăm $\cos^2\alpha = u \in [0, 1]$ și avem

$x^3 + x^2(u-2) - x(1-u) + 2 - 3u + u^2 = 0 \Leftrightarrow$

$u^2 - 3u + 2 + ux - x + ux^2 - 2x^2 + x^3 = 0 \Leftrightarrow$

$u^2 + u(x^2 + x - 3) + x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$

Această ultimă relație o privim ca pe o ecuație de gradul al doilea. Avem discriminantul $\Delta = (x^2 + x - 3)^2 - 4(x^3 - 2x^2 - x + 2) =$ $= x^4 + x^2 + 9 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - 4x^3 + 8x^2 + 4x - 8 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2$. Deci

$$u_{1,2} = \frac{3 - x - x^2 \pm (x^2 - x + 1)}{2}$$

și deci $u_1 = 2 - x$ și $u_2 = 1 - x^2$. Din $u = \cos^2\alpha$ avem

1) $\cos^2\alpha = 2 - x \Rightarrow x = 2 - \cos^2\alpha$.

2) $\cos^2\alpha = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \in \Rightarrow x = \pm \sin\alpha$.

**86.** Avem $\Delta = (2m^2 - m - 1)^2 - 4m(m+1)(m-1)^2 = [(m-1)(2m+1)]^2 - 4m(m+1)(m-1)^2 = (m-1)^2$.

Deci $x_{1,2} = \frac{2m^2 - m - 1 \pm (m-1)}{2(m-1)^2} \Rightarrow x_1 = \frac{m+1}{m-1}$ și $x_2 = \frac{m}{m-1}$

Caz. 1 $x_1 \in \mathbf{Z}$. Avem $\frac{m+1}{m-1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{m-1+2}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}$ $\in Z$ și deci $(m-1) \mid 2 \Rightarrow m - 1 \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Dacă $m - 1 = 1 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow x_1 = 3$.

Dacă $m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x_1 = -1$.

Dacă $m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow x_1 = 2$.

Dacă $m - 1 = -2 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow x_1 = 0$.

Caz 2. $x_2 \in \mathbf{Z}$. Avem $\frac{m}{m-1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{m-1+1}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1}$ $\in \mathbf{Z}$ și deci $(m-1) \mid 1 \Rightarrow m - 1 \in \{\pm 1\}$.

Dacă $m - 1 = 1 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow x_2 = 2$.

Dacă $m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow x_2 = 0$.

**87.** Fie $A_1$ de afix $z_1$, $A_2$ de afix $z_2$, $A_3$ de afix $z_3$ și $A$ de afix $z$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Impunem condiția $A_1A_2 = A_3A$ și $A_1A = A_2A_3$ de unde va rezulta că $A_1A_2AA_3$ este paralelogram sau trapez isoscel.

Avem $A_1A_2 = |z_1 - z_2| = |1 + i - 2 - i| = 1$.

$A_3A = |z_3 - z| = |3 + 4i - x - yi| = \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2}$.

$A_1A = |z_1 - z| = |1 + i - x - yi| = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}$.

$A_2A_3 = |z_2 - z_3| = |2 + i - 3 - 4i| = |-1 - 3i| = \sqrt{10}$.

și deci obținem sistemul

$$\begin{cases} (3-x)^2+(4-y)^2=1 \\ (1-x)^2+(1-y)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-6x-8y=-24 \\ x^2+y^2-2x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ x^2+y^2-2x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-\frac{3}{2}y \\ 13y^2-92y+160=0 \end{cases}$$

După calcule obținem $x_1=2$, $y_1=4$ și $x_2=\frac{44}{13}$, $y_2=\frac{40}{13}$.

Pentru $z=2+4i$ avem $A_1A_2A_3A$ paralelogram.

Pentru $z=\frac{44}{13}+\frac{40}{13}i$ avem $A_1A_2AA_3$ este trapez isoscel.

88. Fie $h=X^7-1 \Rightarrow X^7=h+1$ și avem $f=(X^7)^n X^3+(X^7)^n X-(X^7)^9 X^6+(X^7)^7 X+X^3+X+1=(h+1)^n X^3+(h+1)^n X-(h+1)^9 X^6+(h+1)^7 X+X^3+X+1$.

Dezvoltînd cu binomul lui Newton și grupînd termenii avem

$$f=k(X)\cdot h+X^3+X-X^6+X+X^3+X+1, \quad (1).$$

Dar din $g=X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ rezultă

$$X^6=g-X^5-X^4-X^3-X^2-X-1$$

și înlocuind în (1) obținem

$$f=k(X)\cdot h+X^3+X-g+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1+X+X^3+X+1$$

și deci

$$f=k(X)\cdot h-g+X^5+X^4+3X^3+X^2+4X+2, \quad (2).$$

Avem $h=X^7-1=(X-1)(X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)=(X-1)g$ și înlocuind în (2) obținem

$$f=k(X)(X-1)g-g+X^5+X^4+3X^3+X^2+4X+2=$$
$$=g[k(X)\cdot(X-1)-1]+X^5+X^4+3X^3+X^2+4X+2.$$

Deoarece grad $g=6$ din teorema de existență și unicitate rezultă că restul împărțirii lui $f$ la $g$ este

$$r=X^5+X^4+3X^3+X^2+4X+2.$$

89. Se verifică că $f$ este reductibil peste $\mathbb{Q}$, mai precis

$$f=(X^2+X+1)(X^4-X+1)$$

și această descompunere este în factori ireductibili peste $\mathbb{Q}$. Fie $x_1$, $x_2$ rădăcinile lui $X^2+X+1$ și $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$ rădăcinile lui $X^4-X+1$.

Determinăm polinomul de grad minim pentru $y_1$, $y_2$. Considerăm $g_1 = aX^2 + bX + c$ și impunem condiția ca $y_1$ să fie rădăcină, adică $ay_1^2 + by_1 + c = 0 \Rightarrow a(x_1^4 + x_1)^2 + b(x_1^4 + x_1) + c = 0$, (1). Deoarece $x_1$ este rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$ avem $x_1^2 = -x_1 - 1 \Rightarrow x_1^4 = (-x_1 - 1)^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1 = -x_1 - 1 + 2x_1 + 1 = x_1$.

Relația (1) devine $a(x_1 + x_1)^2 + b(x_1 + x_1) + c = 0 \Rightarrow 4ax_1^2 + 2bx_1 + c = 0 \Rightarrow 4a(-x_1 - 1) + 2bx_1 + c = 0 \Rightarrow x_1(-4a + 2b) - 4a + 2b) - 4a + c = 0$

și deoarece $x_1$ nu poate satisface o ecuație cu coeficienții raționali de grad mai mic decît 2 și netrivială, rezultă

$$-4a + 2b = 0 \text{ și } -4a + c = 0 \Rightarrow b = 2a \text{ și } c = 4a.$$

Deci $g_1 = aX^2 + 2aX + 4a = a(X^2 + 2X + 4)$, $a \in \mathbf{Q}^*$. Lucrînd analog pentru $y_2$ obținem același polinom și deci

$$g_1 = g_2 = a(X^2 + 2X + 4),\ a \in \mathbf{Q}^*.$$

Determinăm polinomul de grad minim pentru $y_3$, $y_4$, $y_5$, $y_6$. Avem

$$x_3^4 - x_3 + 1 = 0 \Rightarrow x_3^4 = x_3 - 1 \Rightarrow y_3^4 = x_3^4 + x_3 = 2x_3 - 1.$$

Fie $g_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ și impunem condiția ca $y_3$ să fie rădăcină. Calculăm puterile lui $y_3$, ținînd seama că, de cîte ori apare $x_3^4$ îl vom înlocui cu $x_3 - 1$. Avem $y_3 = 2x_3 - 1 \Rightarrow y_3^2 = 4x_3^2 - 4x_3 + 1 \Rightarrow y_3^3 = 8x_3^3 - 12x_3^2 + 6x_3 - 1$ și $y_3^4 = (y_3^2)^2 = (4x_3^2 - 4x_3 + 1)^2 = 16x_3^4 + 16x_3^2 + 1 - 32x_3^3 + 8x_3^2 - 8x_3 =$

$= 16(x_3 - 1) + 24x_3^2 - 32x_3^3 - 8x_3 + 1 = -32x_3^3 + 24x_3^2 + 8x_3 - 15$.

Înlocuind în $g_3(y_3) = 0$ obținem

$a(-32x_3^3 + 24x_3^2 + 8x_3 - 15) + b(8x_3^3 - 12x_3^2 + 6x_3 - 1) +$

$c(4x_3^2 - 4x_3 + 1) + d(2x_3 - 1) + e = 0 \Rightarrow x_3^3(-32a + 8b) +$

$x_3^2(24a - 12b + 4c) + x_3(8a + 6b - 4c + 2d) - 15a - b + c -$

$- d + e = 0$. Ținînd seama că polinomul $X^4 - X + 1$ este ireductibil peste $\mathbf{Q}$ avem că $x_3$ nu poate satisface o ecuație netrivială cu coeficienți raționali de grad mai mic decît 4 și deci obținem sistemul:

$$\begin{cases} -32a + 8b = 0 \\ 24a - 12b + 4c = 0 \\ 8a + 6b - 4c + 2d = 0 \\ -15a - b + c - d + e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + b = 0 \\ 6a - 3b + c = 0 \\ 4a - 3b - 2c + d = 0 \\ -15a - b + c - d + e = 0 \end{cases}$$

În acest sistem $b$, $c$, $d$, $e$ sînt necunoscute principale, iar $a$ necunoscută secundară. Rezolvîndu-l, obținem $b = 4a$, $c = 6a$, $d = -4a$, $e = 9a$ și atunci $g_3 = a(X^4 + 4X^3 + 6X^2 - 4X + 9)$, $a \in \mathbf{Q}^*$, și analog pentru $y_4$, $y_5$, $y_6$. Deci

$$g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = a(X^4 + 4X^3 + 6X^2 - 4X + 9),\ a \in \mathbf{Q}^*$$

**90.** Fie $g = a_6 X^6 + a_5 X^5 + a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbf{Q}[X]$ un polinom căutat. Scriind că $g(x^3) = 0$ obținem

$$a_6x^{18} + a_5x^{15} + a_4x^{12} + a_3x^9 + a_2x^6 + a_1x^3 + a_0 = 0, \qquad (1)$$

Cum $f(x) = 0$, avem $x^6 = 2$, de unde deducem ușor că $x^9 = 2x^3$, $x^{12} = 4$, $x^{15} = 4x^3$, $x^{18} = 8$ și (1) devine

$$8a_6 + 4a_5x^3 + 4a_4 + 2a_3x^3 + 2a_2 + a_1x^3 + a_0 = 0$$

adică $(4a_5 + 2a_3 + a_1)x^3 + (8a_6 + 4a_4 + 2a_2 + a_0) = 0$. Deoarece polinomul minimal al lui $x$ este de gradul 6, rezultă

$$\begin{cases} 4a_5 + 2a_3 + a_1 = 0 \\ 8a_6 + 4a_4 + 2a_2 + a_0 = 0 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} 0 \cdot a_6 + 4a_5 + 0 \cdot a_4 + 2a_3 + 0 \cdot a_2 + a_1 + 0 \cdot a_0 = 0 \\ 8a_6 + 0 \cdot a_5 + 4a_4 + 0 \cdot a_3 + 2a_2 + 0 \cdot a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Se vede că $a_1$, $a_0$ pot fi luate ca necunoscute principale, iar $a_6$, $a_5$, $a_4$, $a_3$, $a_2$ ca necunoscute secundare. Atunci din sistem rezultă

$$a_1 = -4a_5 - 2a_3 \text{ și } a_0 = -8a_6 - 4a_4 - 2a_2$$

Polinoamele căutate sînt de forma

$g = a_6 X^6 + a_5 X^5 + a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 - 2(2a_5 + a_3) X - 2(4a_6 + 2a_4 + a_2)$, (2) cu $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbf{Q}$ nu toate nule. De exemplu pentru $a_2 = 1$ și $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, obținem polinomul $g = X^2 - 2$, care reprezintă tocmai polinomul minimal al lui $y = x^3 = \sqrt{2}$ peste $\mathbf{Q}$. Se observă că polinomul dat de (2) se divide cu $X^2 - 2$, adică cu polinomul minimal al lui $y$. De altfel, acest lucru este valabil în general, deoarece orice polinom din $\mathbf{Q}[X]$ care admite pe $y$ ca rădăcină se divide cu polinomul minimal al lui $y$.

**91.** Fie $y = x^6$, $x$ fiind rădăcină a polinomului $X^3 - X + 1$, și deci $x^3 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = x - 1 \Rightarrow x^6 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1$, (1). De asemenea $y^2 = (x^2 - 2x + 1)^2 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = x \cdot x^3 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = x(x - 1) - 4x + 4 + 6x^2 - 4x + 1 = 7x^2 - 9x + 5$ și deci $y^2 = 7x^2 - 9x + 5$, (2) Din (1) și (2) avem sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 2x = y - 1 \\ 7x^2 - 9x = y^2 - 5 \end{cases}$$

în necunoscutele $x$ și $x^2$. Rezolvind sistemul obținem

$$x = \frac{1}{5}(y^2 - 7y + 2) \text{ și } x^2 = \frac{1}{5}(2y^2 - 9y - 1), \qquad (3).$$

Tot din (1) și (2) avem $y^3 = y \cdot y^2 = (x^2 - 2x + 1)(7x^2 - 9x + 5) = 7x^4 - 23x^3 + 30x^2 - 19x + 5 = 7x(x - 1) - 23(x - 1) + 30x^2 - 19x + 5 = 37x^2 - 49x + 28$ și deci $y^3 = 37x^2 - 49x + 28$, (4).

Înlocuind relațiile (3) în relația (4) avem.

$$y^3 = \frac{37}{5}(2y^2 - 9y - 1) - \frac{49}{5}(y^2 - 7y + 2) + 28$$

și efectuînd calcule, se obține $y^3 - 5y^2 - 2y - 1 = 0$, adică $y$ este rădăcină a polinomului

$$Y^3 - 5Y^2 - 2Y - 1 \in \mathbf{Z}[Y].$$

**92.** Dacă $x_1$ este rădăcină a ecuației $x^3 - 1 = 0$ atunci $\frac{1}{x_1}$ este rădăcină a ecuației $\frac{1}{x^3} - 1 = 0 \Rightarrow 1 - x^3 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$ și deci $\frac{1}{x_1}$ este tot rădăcină a ecuației $x^3 - 1 = 0$, fie aceasta $x_2$. (În final se va observa că nu are importanță care sînt rădăcinile $x_1$ și $y_4$ din enunț). Fie deci $z = \frac{1}{x_1} + y_4^2 = x_2 + y_4^2$, (1), Avem $x_2^3 = 1$ și $y_4^4 = 2$ și $z^2 = x_2^2 + 2x_2 y_4^2 + y_4^4 = x_2^2 + 2x_2 y_4^2 + 2$, (2) și $z^3 = x_2^3 + 3x_2^2 y_4^2 + 3x_2 y_4^4 + y_4^6 = 1 + 3x_2^2 y_4^2 + 6x_2 + 2y_4^2$, (3). Din (1) avem $x_2 = z - y_4^2$ și înlocuind în (3) obținem $z^3 = 1 + 3(z - y_4^2)^2 y_4^2 + 6x_2 + 2y_4^4 = 1 + 3(z^2 - 2zy_4^2 + y_4^4) y_4^2 + 6(z - y_4^2) + 2y_4^2 = 1 + 3z^2 y_4^2 + 6y_4^2 + 6z - 6zy_4^2 - 6y_4^2 + 2y_4^2 = 1 + 3z^2 y_4^2 - 12z + 6z + 4 = 5 - 6z + 3z^2 y_4^2$ și deci $z^3 = 5 - 6z + 3z^2 y_4^2 \Rightarrow z^3 - 5 + 6z = 3z^2 y_4^2$ și ridicînd la pătrat avem $(z^3 - 5 + 6z)^2 = 9z^4 y_4^4 = 18z^4 \Rightarrow z^6 + 25 + 36z^2 - 10z^3 + 12z^4 - 60z = 18z^4 \Rightarrow z^6 - 6z^4 - 10z^3 + 36z^2 - 60z + 25 = 0$ ceea ce arată că $z$ este rădăcină a polinomului

$$X^6 - 6X^4 - 10X^3 + 36x^2 - 60X + 25.$$

**93.** Avem $h = X^3 + X^2 + X + 1 = X^2(X + 1) + X + 1 = (X^2 + 1)(X + 1)$. Deci $h(i) = h(-i) = h(-1) = 0$. Deoarece grad $h = 3$ rezultă că restul împărțirii lui $f$ la $h$ are cel mult gradul 2, fie acesta $aX^2 + bX + c$. Avem identitatea împărțirii:

$$f = h \cdot q + aX^2 + bX + c$$

Avem $f(-1) = h(-1)\, q(-1) + a - b + c$ și $f(i) = h(i)\, q(i) - a + bi + c$. Pe de altă parte $f(-1) = (-1)^{4n+3} + (-1)^{4n+1} + (-1)^{65} + (-1)^{44} + (-1)^3 + (-1) - 1 = -5$ și $f(i) = i^{4n+3} + i^{4n+1} + i^{44} + i^3 + i - 1 = (i^4)^n i^3 + (i^4)^n i + (i^4)^{11} - i + i - 1 = i^3 + i + 1 - 1 = -i + 2i = i = 0 + 1i$.

Deci $f(-1) = a - b + c = -5$ și $f(i) = -a + bi + c = i$ de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} a - b + c = -5 \\ -a + c = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

cu soluțiile $a = -2$, $b = 1$ și $c = -2$. Rămînc că restul împărțirii lui $f$ la $h$ este: $-2X^2 + X - 2$.

**94.** În relația dată facem $n = 1$ și avem $a_1 = 8$

a) Scriind relația dată pentru $n$ și $n + 1$ obținem

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 5n^2 + 3$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = 5(n + 1)^2 + 3$$

Prin scădere avem $a_{n+1} = 5\ (n + 1)^2 - 5n^2 = 10\ n + 5$, $(\forall) n \geqslant 1$ și deci $a_n = 10\ (n - 1) + 5 = 10\ n - 5$, $(\forall)\ n \geqslant 2$. Am obținut

$$a_n = \begin{cases} 8 \text{ dacă } n = 1 \\ 10n - 5 \text{ dacă } n \geqslant 2 \end{cases}$$

b) Din a) găsim ușor că $a_1 = 8$, $a_2 = 15$ și $a_3 = 25$ și $2\ a_2 \neq a_1 + a_3$ adică $(a_n)_n \geqslant$ nu este progresie aritmetică.

**95.** Să presupunem că $f$ poate fi pătratul altui polinom, fie acesta $aX^2 + bX + c$ (deoarece $f$ are gradul 4 rezultă că el poate fi pătratul unui polinom de gradul 2). Avem $(aX^2 + bX + c)^2 = a^2 X^4 + b^2 X^2 + c^2 + 2ab X^3 + 2ac X^2 + 2bc X = a^2 X^4 + 2ab X^3 + (b^2 + 2 ac) X^2 + 2 bc X + c^2$.

În mod necesar avem

$$X^4 + 4X^3 + mX^2 - 12X + n = a^2X^4 + 2ab X^3 + (b^2 + 2 ac) X^2 + 2bc X + c^2$$

de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 4 \\ b^2 + 2ac = m \\ 2bc = -12 \\ c^2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ sau } a = -1 \\ ab = 2 \\ b^2 + 2ac = m \\ bc = -6 \\ c^2 = n \end{cases}$$

Caz 1. $a = 1$. Obținem succesiv $b = 2$, $c = -3$, $n = 9$ și $m = -2$. Deci

$$X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 12X + 9 = (X^2 + 2X - 3)^2.$$

Caz 2. $a = -1$. Obținem $b = -2$, $c = 3$, $n = 9$ și $m = -2$. Deci

$$X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 12X + 9 = (-X^2 - 2X + 3)^2.$$

**96.** Presupunem că $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ pot fi termeni într-o progresie aritmetică. Atunci există numerele naturale nenule $n$, $m$, $p$ distincte, astfel încît

$$\sqrt{2} = a_1 + nr, \qquad \sqrt{3} = a_1 + mr, \qquad \sqrt{5} = a_1 + pr$$

unde $a_1$ este primul termen al progresiei și $r$ este rația ei.

Scăzînd primele două obținem $\sqrt{2} - \sqrt{3} = (n - m)\ r$, (1)

Scăzînd ultimele două obținem $\sqrt{3} - \sqrt{5} = (m - p)\ r$, (2). Din (1) și (2) găsim

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{n - m}{m - p}, \quad (3).$$

Deoarece $n, m, p \in \mathbf{N}^*$ rezultă $\frac{n-m}{m-p} \in \mathbf{Q}^*$. Vom arăta că membrul stîng al relației (3) nu este în $\mathbf{Q}$.

Presupunem prin absurd că $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = x \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} = x(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \Rightarrow \sqrt{3}(x+1) = \sqrt{2} + x\sqrt{5} \Rightarrow 3(x+1)^2 = 2 + 5x^2 + 2x\sqrt{10}$ de unde

$$\sqrt{10} = \frac{3(x+1)^2 - 2 - 5x^2}{2x}$$

relație imposibilă deoarece membrul stîng nu este număr rațional iar membrul drept este rațional.

Deci în (3) membrul stîng nu este rațional, în timp ce membrul drept este rațional, ceea ce este imposibil.

Rămîne că $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nu pot fi termeni într-o progresie aritmetică.

97. Considerăm cunoscut faptul că dacă $a, b, c \in \mathbf{Q}$ atunci

$$a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0, \qquad (1).$$

Notăm $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} = x$. Din

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - x = -\sqrt[3]{3}$$

prin ridicare la cub se obține

$$\sqrt[3]{4}(6 - 3x + 3x^2) + \sqrt[3]{2}(6 - 6x + 3x^2) - x^3 - 3 = 0, \qquad (2).$$

Notăm

$$a = 6 - 3x + 3x^2, \quad b = 6 - 6x + 3x^2, \quad c = -x^3 - 3$$

Presupunem prin absurd că $x \in \mathbf{Q}$. Atunci din (2), ținînd seama de (1) rezultă $a = b = c = 0$ adică sistemul

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 6x + 6 = 0 \\ x^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Constatăm ușor că rădăcinile primei ecuații nu verifică și celelalte două. Deci sistemul este incompatibil.

Rămîne că $x \notin \mathbf{Q}$ adică $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4} \notin \mathbf{Q}$.

98. a) Impunem condițiile $6x - 1 = m$, $39 - 4x^2 = n$, $m, n \in \mathbf{N}$ și $39 - 4x^2 \geqslant 6x - 1 \geqslant 0$. Adică $x = \frac{m+1}{6}$ și deci $39 - \left(\frac{m+1}{3}\right)^2 = n \Rightarrow (m+1)^2 = 9(39-n) \Rightarrow (m+1)^2$ este divizibil cu 9, de unde rezultă $m + 1 = 3k$, $k \in \mathbf{N}$ și deci $x = k/2$, $k \in \mathbf{N}$.

Inegalitățile conduc la $x \geqslant 1/6$ și $4x^2 + 6x - 40 \leqslant 0$ adică $x \in \left[-4, \frac{5}{2}\right]$ și deci $x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{2}\right]$, $x = k/2$, $k \in \mathbf{N}$.

În definitiv $x \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right\}$. Pentru rezolvarea efectivă verificăm valorile lui $x$ direct în ecuație. Se obține soluția unică $x = \frac{3}{2}$

**99.** Notăm termenii sumei cu $a_k$ și avem

$$a_k = \frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!} = \frac{2^{k-1}[(k+1)-2]}{(k+1)!} = \frac{2^{k-1}(k+1)}{(k+1)!} - \frac{2^k}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{2^{k-1}}{k!} - \frac{2^k}{(k+1)!}$$

Atunci $S = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^{k-1}}{k!} - \frac{2^k}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{2^1}{2!} + \frac{2^1}{2!} - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^2}{3!} -$

$$- \frac{2^3}{4!} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n!} - \frac{2^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{2^n}{(n+1)!},$$

**100.** Deoarece $x$ este rădăcină a ecuației $x^3 - x - 3 = 0$ rezultă că $x^3 = x + 3$, (1). Avem

$$y = x^4 - 3x + 2 = x^3x - 3x + 2 = (x+3)x - 3x + 2 = x^2 + 2.$$

Deci $y = x^2 + 2$ și problema se reduce la eliminarea lui $x$ între relațiile

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ x^3 - x - 3 = 0 \end{cases}$$

Avem $x^2x - x - 3 = 0 \Rightarrow (y-2)x - x - 3 = 0 \Rightarrow x(y-3) = 3$
Prin ridicare la pătrat obținem $x^2(y-3)^2 = 9$ și înlocuind din nou. $x^2 = y - 2$ avem $(y-2)(y-3)^2 = 9$ și după înmulțiri

$$y^3 - 8y^2 + 21y - 27 = 0$$

ceea ce reprezintă ecuația căutată.

**101.** Este cunoscut faptul că dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A \in M_2(\mathbb{C})$ atunci $A$ este rădăcină a polinomului său caracteristic, adică, mai pe scurt, $A$ veridică relația $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$. În cazul matricei dată în enunț avem $A^2 - 4A + 4I_2 = O_2$.
Avem $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = a_1A + b_1I_2$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ și

$$A^2 = 4 \cdot A - 4 \cdot I_2 = a_2 A + b_2 I_2, \quad a_2 = 4, \quad b_2 = -4.$$

Presupunem că $A^n = a_nA + b_nI_2$ și demonstrăm că $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_2$ de unde vom stabili și relațiile de recurență pentru șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$. Avem

$$A^{n+1} = A^nA = (a_nA + b_nI_2)A = a_nA^2 + b_nA = a_n(4A - 4I_2) +$$

$$+ b_nA = (4a_n + b_n)A - 4a_nI_2 = a_{n+1}A + b_{n+1}I_2$$

unde $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ și $b_{n+1} = -4a_n$. Din a doua relație avem $b_n = -4a_{n-1}$, $(\forall)\ n \geqslant 2$, și înlocuind în prima relație obținem $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} - 4a_n + 4a_{n-1} = 0$, $(\forall)\ n \geqslant 2$. Rezolvăm problema recurenței șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ca la problema **45**.

Ecuația caracteristică este $x^2 - 4x + 4 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = r_2 = 2$. Deci $a_n = \alpha\, 2^n + \beta\, n\, 2^n = (\alpha + \beta n)\, 2^n$, unde $\alpha$ și $\beta$ se determină din condițiile inițiale, punînd $a_1 = 1$ și $a_2 = 4$. Avem

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 1 \\ 4\alpha + 8\beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{matrix}.$$

și deci $a_n = \dfrac{1}{2} n 2^n = n 2^{n-1} \Rightarrow a_{n-1} = (n-1)2^{n-2}$ și din $b_n = -4a_{n-1}$ avem $b_n = -4(n-1)2^{n-2} = (1-n)2^n$. Prin urmare avem

$$A^n = n2^{n-1} A + (1-n)\, 2^n I_2 = n\, 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + (1-n)2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & n\, 2^{n-1} \\ -n\, 2^{n-1} & (2-n)2^{n-1} \end{pmatrix}$$

**102.** Este cunoscut faptul că dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A \in M_3(\mathbf{C})$

Atunci $A$ satisface relația.

$$A^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^2 + S(A) \cdot A - \det(A) \cdot I_3 = O_3$$

unde

$$S(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

În cazul nostru $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2$, $S(A) = -1$, $\det(A) = -2$ și deci $A^3 = 2A^2 + A - 2I_3$.

Avem

$$A^1 = 0 \cdot A^2 + 1 \cdot A + 0 \cdot I_3 = a_1 A^2 + b_1 A + c_1 I_3,\ a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ c_1 = 0,$$

$$A^2 = 1 \cdot A^2 + 0 \cdot A + 0 \cdot I_3 = a_2 A^2 + b_2 A + c_2 I_3,\ a_2 = 1,\ b_2 = 0,\ c_2 = 0,$$

$$A^3 = 2 \cdot A^2 + 1 \cdot A - 2 \cdot I_3 = a_3 A^2 + b_3 A + c_3 I_3,\ a_3 = 2,\ b_3 = 1,\ c_3 = -2.$$

Presupunem că $A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$ și demonstrăm că $A^{n+1} = a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A + c_{n+1} I_3$ de unde vom stabilit și relațiile de recurență pentru șirurile $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$, $(c_n)_{n\geqslant 1}$. Avem succesiv:

$$A^{n+1} = A^n A = (a_n A^2 + b_n A + c_n I_3) A = a_n A^3 + b_n A^2 + c_n A =$$

$$= a_n(2A^2 + A - 2I_3) + b_n A^2 + c_n A = (2a_n + b_n) A^2 +$$

$$+ (a_n + c_n) A - 2a_n I_3$$

și punem

$$a_{n+1} = 2\,a_n + b_n,\quad b_{n+1} = a_n + c_n,\quad c_{n+1} = -2\,a_n$$

Din ultima relație $c_n = -2\,a_{n-1}$ și din a doua $b_{n+1} = a_n - 2\,a_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} - 2\,a_{n-2}$. Înlocuind acum în prima relație obținem

$$a_{n+1} = 2\,a_n + a_{n-1} - 2\,a_{n-2}$$

Rezolvînd recurența liniară și omogenă de ordinul 3 ca la problema 46 avem ecuația caracteristică $x^3 = 2\,x^2 + x - 2$ cu rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Deci $a_n = \alpha\,(-1)^n + \beta + \gamma\,2^n$, unde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se determină din condițiile inițiale, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Obținem sistemul

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 4\gamma = 1 \\ -\alpha + \beta + 8\gamma = 2 \end{cases}$$

cu soluțiile $\alpha = 1/6$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 1/3$ și deci

$$a_n = \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,2^n = \frac{(-1)^n - 3 + 2^{n+1}}{6}$$

Înlocuind acum în $b_n = a_{n-1} - 2\,a_{n-2}$ și $c_n = -2\,a_{n-1}$, după calcule, obținem

$$b_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2} \text{ și } c_n = \frac{3 - 2^n - (-1)^{n-1}}{8}$$

Ținînd seama de $A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$ și efectuînd toate calculele se ajunge la

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1} + 3 + (-1)^n}{6} & \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} & \frac{2^{n+1} - 3 + (-1)^n}{6} \\ \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} & \frac{2^n + 2\,(-1)^n}{3} & \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} \\ \frac{2^{n+1} - 3 + (-1)^n}{6} & \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} & \frac{2^{n+1} + 3 + (-1)^n}{6} \end{pmatrix}$$

Obs. Ținînd seama că $A \in M_3(\mathbf{Z})$ rezultă imediat că $A^n \in M_3(\mathbf{Z})$ și deci elementele matricei $A^n$ sînt întregi (se observă că sînt chiar pozitive), de unde rezultă că $(2^{n+1} + 3 + (-1)^n)$ se divide la 6, $(2^n + (-1)^{n-1})$ se divide la 3, $(2^n + 2\,(-1)^n)$ se divide la 3, pentru orice $n$ număr natural.

**103.** Fie $x \in S_4$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x(1) & x(2) & x(3) & x(4) \end{pmatrix}$.

Caz 1. $x(1) = 1 \Rightarrow \tau(x(1)) = \tau(1) = 2$

$\quad\quad\quad

din $x(3) = 2 \Rightarrow \tau(x(3)) = \tau(2) = 4$
$\quad\quad\quad

din $x(3) = 3 \Rightarrow \tau(x(3)) = \tau(3) = 1$
$\Rightarrow x(4) = 1$
$x(\sigma(3)) = x(4)$

din $x(4) = 1 \Rightarrow \tau(x(4)) = \tau(1) = 2$
$\Rightarrow x(2) = 2$
$x(\sigma(4)) = x(2)$

din $x(2) = 2 \Rightarrow \tau(x(2)) = \tau(2) = 4$
$\Rightarrow x(1) = 4$
$x(\sigma(2)) = x(1)$

Deci soluție $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

**104.** Procedăm ca la exercițiul **101.** A verifică relația $A^2 - 2A - 3I_2 = O_2$.
Punem $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 = a_1 A + b_1 I_2$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ și
$A^2 = 2 \cdot A + 3 \cdot I_2 = a_2 A + b_2 I_2$, $a_2 = 2$, $b_2 = 3$.
Presupunem $A^n = a_n A + b_n I_2$ și demonstrăm că $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I_2$, de unde vom stabili și relațiile de recurență pentru șirurile $(a_n)$ și $(b_n)$. Avem succesiv.
$A^{n+1} = A^n A = (a_n A + b_n I_2) A = a_n A^2 + b_n A = a_n (2A + 3I_2) + b_n A = (2a_n + b_n) A + 3a_n I_2 = a_{n+1} A + b_{n+1} I_2$
unde

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3a_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \\ b_n = 3a_{n-1} \end{cases} \quad (\forall)\ n \geqslant 2.$$

Rezolvăm problema recurenței șirului $(a_n)_{n \geqslant 1}$. Ecuația caracteristică este $x^2 = 2x + 3$ cu rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 3$. Deci termenul general al șirului $(a_n)$ este $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 3^n$, unde $\alpha$ și $\beta$ se determină din condițiile inițiale $a_1 = 1$ și $a_2 = 2$. Avem.

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + 9\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1/4 \text{ și } \beta = 1/4$$

Deci $a_n = -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{4} 3^n = \frac{1}{4}[3^n - (-1)^n]$ de unde

$$a_{n-1} = \frac{1}{4}[3^{n-1} - (-1)^{n-1}] \qquad b_n = \frac{3}{4}[3^{n-1} - (-1)^{n-1}].$$

Înlocuind în $A^n = a_n A + b_n I_2$ obținem:

$$A_n = \frac{1}{4}[3^n - (-1)^n] \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 2+i & 1-i \end{pmatrix} + \frac{3}{4}[3^{n-1} - (-1)^{n-1}] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**105.** Reamintim că:

1) $(\forall)\ z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k = \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k}$.

2) $(\forall)\ z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbf{C} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \overline{z}_k = \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k}$.

3) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$.

a) Din definiția determinantului de ordin $n$ avem

$$\det \bar{A} = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau)\, \bar{a}_{1\tau(1)}\, \bar{a}_{2\tau(2)} \dots \bar{a}_{n\tau(n)} =$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \overline{\varepsilon(\tau)\, a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}} =$$

$$= \overline{\sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau)\, a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}} = \overline{\det A}$$

b) Din teorema Binet-Cauchy rezultă că $(\forall)\ A, B \in M_n(\mathbf{C})$ avem

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Avem $\det(A \cdot \bar{A}) = \det(A) \cdot \det(\bar{A}) = \det(A) \cdot \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 \geqslant 0$.

**106.** Relațiile lui Viete sînt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 =: v_1 \\ x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_4x_5 = 0 =: v_2 \\ x_1x_2x_3 + \dots + x_3x_4x_5 = 0 =: v_3 \\ x_1x_2x_3x_4 + \dots + x_2x_3x_4x_5 = -2 =: v_4 \\ x_1x_2x_3x_4x_5 = 2 =: v_5 \end{cases}$$

Observăm că pentru orice permutare $\tau \in S_5$ avem $\sum_{k=1}^{5} x_{\tau(k)}^2 = \sum_{k=1}^{5} x_k^2$ și $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x_{\tau(k)}^2} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x_k^2}$.

Avem $S = \sum_{k=1}^{5} (x_{\tau(k)})^2 + 2\sum_{k=1}^{5} 1 + \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{x_{\tau(k)}}\right)^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{5} x_k^2 + 10 + \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x_k^2}, \quad (1)$$

Dar $\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{5} x_k\right)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_4x_5) = v_1^2 - 2v_2 = 0$

și $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{x_k^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_5}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x_1x_2} + \dots + \frac{1}{x_4x_5}\right) =$

$= \left(\frac{v_4}{v_5}\right)^2 - 2\left(\frac{v_3}{v_5}\right) = 1$. Deci $S = 10 + 1 = 11$.

**107.** Relațiile lui Viete sînt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 \\ x_1x_2x_3 = 5 \end{cases}$$

Adunînd toate liniile la prima avem

$$D = \begin{vmatrix} x_{\tau(1)} + x_{\tau(2)} + x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} + x_{\tau(2)} + x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} + x_{\tau(2)} + x_{\tau(3)} \\ x_{\tau(2)} & x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} \\ x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} & x_{\tau(2)} \end{vmatrix}$$

și deci

$$D = (x_{\tau(1)} + x_{\tau(2)} + x_{\tau(3)}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{\tau(2)} & x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} \\ x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} & x_{\tau(2)} \end{vmatrix}$$

Ținînd seama că $(\forall)\ \tau \in S_3 \Rightarrow x_{\tau(1)} + x_{\tau(2)} + x_{\tau(3)} = x_1 + x_2 + x_3 = 7$ avem

$$D = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{\tau(2)} & x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} \\ x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} & x_{\tau(2)} \end{vmatrix}$$

Scădem coloana întîia din celelalte coloane și avem

$$D = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_{\tau(2)} & x_{\tau(3)} - x_{\tau(2)} & x_{\tau(1)} - x_{\tau(2)} \\ x_{\tau(3)} & x_{\tau(1)} - x_{\tau(3)} & x_{\tau(2)} - x_{\tau(3)} \end{vmatrix}$$

$$D = 7 \cdot \begin{vmatrix} x_{\tau(3)} - x_{\tau(2)} & x_{\tau(1)} - x_{\tau(2)} \\ x_{\tau(1)} - x_{\tau(3)} & x_{\tau(2)} - x_{\tau(3)} \end{vmatrix}$$

Prin calculul acestui ultim determinant obținem

$D = 7\,(x_{\tau(1)}\,x_{\tau(2)} + x_{\tau(2)}\,x_{\tau(3)} + x_{\tau(3)}\,x_{\tau(1)} - x^2_{\tau(1)} - x^2_{\tau(2)} - x^2_{\tau(3)})$

Dar $x_{\tau(1)}\,x_{\tau(2)} + x_{\tau(2)}\,x_{\tau(3)} + x_{\tau(1)}\,x_{\tau(3)} = x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_2\,x_3 = 3$

și $x^2_{\tau(1)} + x^2_{\tau(2)} + x^2_{\tau(3)} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2\,(x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_2\,x_3) = 49 - 6 = 43.$

Rămîne că $D = 7\,(3 - 43) = -280.$

108. a) Aplicăm regula lui Cramer.

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{vmatrix} = \hat{8} - \hat{9} = -\hat{1} = \hat{6} \text{ și } \Delta_p^{-1} = \hat{6}^{-1} = \hat{6}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{4} \end{vmatrix} = 4 - \hat{6} = -\hat{2} = \hat{5}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{4} - \hat{3} = \hat{1}$$

și $x = \Delta_x\,\Delta_p^{-1} = \hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{2}$, $y = \Delta_y\,\Delta_p^{-1} = \hat{1} \cdot \hat{6} = \hat{6}$

Deci soluție $x = \hat{2}$ și $y = \hat{6}$.

b) Aplicăm tot regula lui Cramer.

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{4} & \hat{0} \end{vmatrix} = \hat{3} \Rightarrow \Delta_p^{-1} = \hat{3}^{-1} = \hat{2}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{4} & \hat{4} & \hat{0} \end{vmatrix} = \hat{4} \Rightarrow x = \Delta_x \Delta^{-1} = \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{3}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{4} & \hat{0} \end{vmatrix} = \hat{0} \Rightarrow x = \Delta_y \Delta_p^{-1} = \hat{0} \cdot \hat{2} = \hat{0}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{4} & \hat{4} \end{vmatrix} = \hat{3} \Rightarrow z = \Delta_z \Delta_p^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{1}$$

Soluție $x = \hat{3}$, $y = \hat{0}$, $z = \hat{1}$.

**109.** Înmulțind prima relație cu 2 și a doua cu 3 (elemente inversabile în $\mathbf{Z}_5$) sistemul devine

$$\begin{cases} x + \hat{4}\, y = \hat{1} \\ x + \hat{4}\, y = \hat{1} \end{cases}$$

adică sistemul se reduce la ecuația $x + \hat{4}\, y = \hat{1} \Rightarrow x = \hat{1} + y$. Se obțin următoarele perechi de soluții.

$(x = \hat{0}, y = \hat{4})$ & $(x = \hat{1}, y = \hat{0})$ & $(x = \hat{2}, y = \hat{1})$ &
$(x = \hat{3}, y = \hat{2})$ & $(x = \hat{4}, y = \hat{3})$.

**110.** Prin calcul direct, obținem succesiv.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{5} \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{4} & \hat{3} \end{pmatrix}, A^4 = \hat{5} \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, A^5 = \hat{5}A,$$

$$A^6 = \hat{5}\, A^2,\ A^7 = \hat{5}\, A^3,\ A^8 = \hat{5}\, A^4 = \hat{5}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci $A^{8k} = I_2$, $A^{8k+1} = A$, $A^{8k+m} = A^m$, cu $m = \overline{1,7}$.

**111.** a) Avem $\hat{2}\,x + \hat{4} = \hat{5} \Rightarrow \hat{2}\,x + \hat{3} + \widehat{35} = \hat{5} + \widehat{35} \Rightarrow \hat{2}\,x = \hat{1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \widehat{20} \cdot \hat{2}\,x = \widehat{20} \cdot \hat{1} \Rightarrow x = \widehat{20}$.

b) Avem $\hat{3}x + \hat{1} = \hat{4}x + \hat{2} \Rightarrow \widehat{35}x + \hat{3}x + \hat{1} + \widehat{38} = \widehat{35}x + \hat{4}x +$
$+ \hat{2} + \widehat{38} \Rightarrow \widehat{38}x = \hat{1} \Rightarrow x = \widehat{38}$.

**112.** Caz 1. Cercetăm dacă $f$ se poate descompune în produsul a două polinoame, unul de gradul 3 și celălalt de gradul 1. Dacă acest fapt ar fi posibil, atunci polinomul de gradul 1 are o rădăcină în $\mathbf{Z}_3$ ($\mathbf{Z}_3$ este corp), iar această rădăcină ar fi și rădăcină a lui $f$. Și reciproc, dacă $f$ admite o rădăcină $\alpha$ în $\mathbf{Z}_3$, atunci el se divide cu $X - \alpha$.

Pentru determinarea rădăcinilor lui $f$ folosim schema lui Horner. Evident 0 nu este rădăcină a lui $f$. Avem

| | $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{1}$ | $\hat{1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{2}$ |

Deci $f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_3$ și, ca urmare, nu se poate descompune în produsul a două polinoame, dintre care unul de gradul întîi.

Caz 2. Cercetăm dacă $f$ se poate descompune în produsul a două polinoame de gradul al doilea.

Fie $f = (aX^2 + bX + c)(mX^2 + nX + p)$. După înmulțiri se ajunge la $f = amX^4 + (an + bm)X^3 + (ap + bn + mc)X^2 + (bp + nc)X + pc$. Prin identificarea coeficienților obținem sistemul:

$$\begin{cases} am = \hat{2} \\ an + bm = \hat{2} \\ ap + bn + mc = \hat{2} \\ bp + nc = \hat{1} \\ pc = \hat{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a = \hat{1} \,\&\, m = \hat{2}) \text{ sau } (a = \hat{2} \,\&\, m = \hat{1}) \\ an + bm = \hat{2} \\ ap + bn + mc = \hat{2} \\ bp + nc = \hat{1} \\ (p = \hat{1} \,\&\, c = \hat{1}) \text{ sau } (p = \hat{2} \,\&\, c = \hat{2}) \end{cases} \quad (1)$$

Distingem 4 cazuri.

Caz 1. $a = \hat{1}$, $m = \hat{2}$, $p = \hat{1}$, $c = \hat{1}$. Sistemul (1) se reduce la

$$\begin{cases} n + \hat{2}b = \hat{2} \\ bn = \hat{2} \\ b + n = \hat{1} \end{cases} \quad (2)$$

Din $bn = \hat{2}$ avem $(b = \hat{1} \,\&\, n = \hat{2})$ sau $(b = \hat{2} \,\&\, n = \hat{1})$.

Caz 1.1. $b = \hat{1}$, $n = \hat{2}$. Atunci prima relație din (2) devine $\hat{1} = \hat{2}$ ceea ce este absurd.

Caz 1.2. $b = \hat{2}$, $n = \hat{1}$. Atunci ultima relație din (2) devine $\hat{1} = \hat{0}$ ceea ce este imposibil.

Caz 2. $a = \hat{1}$, $m = \hat{2}$, $p = \hat{2}$, $c = \hat{2}$. Sistemul (1) devine

$$\begin{cases} n + \hat{2}b = \hat{2} \\ bn = \hat{2} \\ b + n = \hat{2} \end{cases} \qquad (3)$$

Din $bn = \hat{2}$ avem ($b = \hat{1}$ & $n = \hat{2}$) sau ($b = \hat{2}$ & $n = \hat{1}$). În ambele cazuri relația a treia din (3) devine $\hat{0} = \hat{2}$ ceea ce este fals.

Caz 3. $a = \hat{2}$, $m = \hat{1}$, $p = \hat{1}$, $c = \hat{1}$. Sistemul (1) devine

$$\begin{cases} \hat{2}n + b = \hat{2} \\ bn = \hat{2} \\ b + n = \hat{1} \end{cases} \qquad (4)$$

Din $bn = \hat{2}$ rezultă ($b = \hat{1}$ & n = $\hat{2}$) sau ($b = \hat{2}$ & $n = \hat{1}$). În ambele cazuri relația a treia din (4) devine $\hat{0} = \hat{1}$ ceea ce este fals.

Caz 4. $a = \hat{2}$, $m = \hat{1}$, $p = \hat{2}$, $c = \hat{2}$. Sistemul (1) devine

$$\begin{cases} \hat{2}n + b = \hat{2} \\ bn = \hat{2} \\ b + n = \hat{2} \end{cases} \qquad (5)$$

Din $bn = \hat{2}$ avem ($b = \hat{1}$ & $n = \hat{2}$) sau ($b = \hat{2}$ & $n = \hat{1}$). În ambele cazuri relația a treia din (5) devine absurdă.

Rămîne că sistemul (1) este incompatibil în $\mathbf{Z}_3$ și deci, $f$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame de gradul al doilea.

Din caz 1 și caz 2 rezultă $f$ ireductibil.

**113.** Determinăm pe $a$ astfel ca $f$ să aibă o rădăcină în $\mathbf{Z}_4$. Avem

1) $f(\hat{0}) = a$ și deci dacă $a = \hat{0}$ avem

$$f = X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 = X^2(X^2 + \hat{3}X + \hat{2}).$$

2) $f(\hat{1}) = a + \hat{2}$ și deci dacă $a = \hat{2}$ avem

$$f = (\hat{X} - 1)(\hat{X}^3 + 2\hat{X} + 2) = (\hat{X} + 3)(\hat{X}^3 + 2\hat{X} + 2).$$

3) $f(\hat{2}) = a$ și deci dacă $a = \hat{0}$ avem

$$f = (X - \hat{2})(X^3 + X^2) = (X + \hat{2})(X^3 + X^2).$$

4) $f(\hat{3}) = a$ și deci dacă $a = \hat{0}$ avem

$$f = (X - \hat{3})(X^3 + \hat{2}X^2) = (X + \hat{1})(X^3 + \hat{2}X^2).$$

Rămîn de studiat cazurile $a = \hat{1}$ și $a = \hat{3}$. Se observă ușor că în ambele cazuri $f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_4$.

Arătăm că $f$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame din care unul este de gradul întîi. Presupunem că acest fapt ar fi posibil. Deoarece coeficientul dominant al lui $f$ este $\hat{1}$ rezultă că coeficientul dominant al polinomului de grad 1 este $\hat{1}$ sau $\hat{3}$. Dar în $\mathbf{Z}_4$ orice polinom de forma $X + a$ sau $\hat{3}X + a$ are o rădăcină în $\mathbf{Z}_4$ și deci $f$ ar avea o rădăcină în $\mathbf{Z}_4$ ceea ce este în contradicție cu afirmația că $f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_4$

Rămîne să cercetăm dacă $f$ se poate descompune în produsul a două polinoame de gradul a doilea.

Caz 1. $a = \hat{1}$. Atunci $f = X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{2}X + \hat{1}$, și fie

$$f = (aX^2 + bX + c)(mX^2 + nX + p)$$

După calcule obținem

$$f = amX^4 + (an + bm)X^3 + (ap + bn + mc)X^2 + (bp + nc)X + pc.$$

Prin identificarea coeficienților obținem sistemul:

$$\begin{cases} am = \hat{1} \\ an + bm = \hat{3} \\ ap + bn + mc = \hat{0} \\ bp + nc = \hat{2} \\ pc = \hat{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a = \hat{1} \ \& \ m = \hat{1}) \text{ sau } (a = \hat{3} \ \& \ m = \hat{3}) \\ an + bm = \hat{3} \\ ap + bn + mc = \hat{0} \\ bp + nc = \hat{2} \\ (p = \hat{1} \ \& \ c = \hat{1}) \text{ sau } (p = \hat{3} \ \& \ c = \hat{3}) \end{cases}$$

Caz 1.1. $a = \hat{1}$, $m = \hat{1}$, $p = \hat{1}$, $c = \hat{1}$. Sistemul (1) se reduce la

$$\begin{cases} n + b = \hat{3} \\ bn = \hat{2} \\ n + b = \hat{2} \end{cases} \quad \text{— imposibil.}$$

Caz 1.2. $a = \hat{1}$, $m = \hat{1}$, $p = \hat{3}$, $c = \hat{3}$. Sistemul (1) devine

$$\begin{cases} n + b = \hat{3} \\ bn = \hat{2} \\ n + b = \hat{2} \end{cases} \quad \text{— imposibil.}$$

Caz 1.3. $a = \hat{3}$, $m = \hat{3}$, $p = \hat{1}$, $c = \hat{1}$. Sistemul (1) devine

$$\begin{cases} n + b = \hat{1} \\ bn = \hat{2} \\ n + b = \hat{2} \end{cases} \quad \text{— imposibil.}$$

Caz 1.4. $a = \hat{3}$, $m = \hat{3}$, $p = \hat{3}$, $c = \hat{3}$. Sistemul (1) devine

$$\begin{cases} n + b = \hat{1} \\ bn = \hat{2} \\ n + b = \hat{2} \end{cases} \text{ imposibil.}$$

În concluzia cazului 1, $f$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame de gradul al doilea.

Caz 2. $a = \hat{3}$. Acest caz este analog cazului 1, și nu-l detaliem.

Rămîne că pentru $a = \hat{1}$ și $a = \hat{3}$ polinomul nu se poate descompune în produsul a două polinoame de grad mai mic decît 4.

114. Se observă imediat că $P(x) > 0$, $(v)\ x \in \mathbf{R}$ și deci polinomul $P$ nu are rădăcini reale. Presupunem prin absurd că $P = fg$, $f, g \in \mathbf{Z}[X]$, cu grad $f < 4$ și grad $g < 4$.

Caz 1. grad $f = 1$ sau grad $g = 1$. Atunci $P$ ar avea o rădăcină rațională ceea ce este absurd.

Caz 2. grad $f$ = grad $g = 2$. Am observat că $P(x) > 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ și din $P(x) = f(x)g(x)$ rezultă că $f(x)$ și $g(x)$ au același semn pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Alegem $f(x) > 0$ și $g(x) > 0$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.
(Să explicăm acest fapt. Din $f(x)g(x) > 0$ rezultă că $f$ și $g$ au același semn. Să presupunem că există $x_1$ și $x_2$ astfel ca $f(x_1) > 0$ $g(x_1) > 0$ și $f(x_2) < 0$, $g(x_2) < 0$. Deci am avea $f(x_1)f(x_2) < 0$ și deoarece funcția polinomială $f$ este continuă pe $\mathbf{R}$, din $f(x_1)f(x_2) < 0$ ar rezulta că există $x_3$ între $x_1$ și $x_2$ astfel ca $f(x_3) = 0$ adică $f(x_3) = 0 \Rightarrow P(x_3) = 0$ și deci $P$ ar avea o rădăcină reală, ceea ce este în contradicție cu $P(x) > 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$)

Avem $P(1) = 1 = f(1)g(1) \Rightarrow f(1) = g(1) = 1$

$P(2) = 1 = f(2)g(2) \Rightarrow f(2) = g(2) = 1$

(S-a folosit faptul că pentru orice $f \in \mathbf{Z}[X]$ și $m \in \mathbf{Z} \Rightarrow f(m) \in \mathbf{Z}$)

Pentru $x = 0$ avem $P(0) = 5 = f(0)g(0)$ de unde rezultă $f(0) = 1$ și $g(0) = 5$ sau invers. Alegem $f(0) = 1$ și $g(0) = 5$. Atunci $f(0) = f(1) = f(2) = 1$ și rezultă că polinomul $f - 1$ are trei rădăcini distincte, reale, ceea ce este absurd, deoarece polinomul $f$ are gradul 2 și deci $f - 1$ are tot gradul doi.

Rămîne că $P$ este ireductibil.

115. Avem $P = X^3(6X^2 + 5X + 6) + 6X^2 + 5X + 6 = (X^3 + 1)(6X^2 + 5X + 6)$

și deci

$$P = (X + 1)(X^2 - X + 1)(6X^2 + 5X + 6), \quad (1).$$

Deoarece polinoamele $X^2 - X + 1$ și $6X^2 + 5X + 6$ nu au rădăcini reale rezultă că forma (1) reprezintă descompunerea lui $P$ peste $\mathbf{Q}$

şi peste **R**. Determinînd rădăcinile celor două polinoame de gradul al doilea din (1), obţinem

$$P = (X+1)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) 6\left(X - \frac{-5+i\sqrt{119}}{12}\right)\left(X - \frac{-5-i\sqrt{119}}{12}\right)$$

care este descompunerea lui $P$ peste **C**.

**116.** Restul împărţirii lui $P$ la $X^2(X-1)^2$ are cel mult gradul 3, fie acesta $r = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Fie $f$ funcţia polinomială ataşată polinomului $P$, adică

$$f(x) = x^{2n} + x^{n+1} - x^n + x^4 + x^3 + 1, \tag{1}$$

şi deci

$$f(x) = x^2(x-1)^2 g(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{2}$$

Din (2) avem $f(0) = d$ şi $f(1) = a + b + c + d$, (3).

Din (1) avem $f(0) = 1$ şi $f(1) = 4$, (4).

Din (3) şi (4) obţinem

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 4 \end{cases} \tag{5}$$

Derivînd (2) obţinem

$$f'(x) = 2x(x-1)^2 g(x) + 2x^2(x-1) g(x) + x^2(x-1)^2 g'(x) + 3ax^2 + 2bx + c$$

de unde $f'(0) = c$ şi $f'(1) = 3a + 2b + c$, (6).

Derivînd (1) obţinem

$$f'(x) = 2nx^{2n-1} + (n+1)x^n - nx^{n-1} + 4x^3 + 3x^2$$

de unde $f'(0) = 0$ şi $f'(1) = 2n + 8$, (7).

Din (6) şi (7) rezultă

$$\begin{cases} c = 0 \\ 3a + 2b + c = 2n + 8 \end{cases} \tag{8}$$

Din (5) şi (8) obţinem sistemul

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 4 \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = 2n + 8 \end{cases}$$

cu soluţiile $a = 2n + 2$, $b = 1 - 2n$, $c = 0$, $d = 1$.

Rămîne că restul împărţirii lui $P$ la $x^2(x-1)^2$ este

$$r = (2n+2)X^3 + (1-2n)X^2 + 1.$$

117. Avem $(x_2x_3x_1)^2 = x_2x_3x_1x_2x_3x_1 = x_2x_30x_1 = 0$ și din ipoteză rezultă $x_2x_3x_1 = 0$. De asemenea $(x_3x_1x_2)^2 = x_3x_1x_2x_3x_1x_2 = x_3(x_1x_2x_3)x_1x_2 = x_30x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_3x_1x_2 = 0$.

Avem succesiv $x_2x_3x_1 = 0 \Rightarrow ax_2x_3x_1 = 0 \Rightarrow (ax_2)x_3x_1 = 0 \Rightarrow x_3x_1(ax_2) = 0 \Rightarrow bx_3x_1(ax_2) = 0 \Rightarrow (bx_3)x_1(ax_2) = 0 \Rightarrow x_1(ax_2)(bx_3) = 0 \Rightarrow x_1ax_2bx_3 = 0$ ceea ce trebuia demonstrat.

118. Pentru a demonstra că $a^d - b^d$ este c.m.m.d.c. al lui $a^n - b^n$ și $a^m - b^m$ vom folosi definiția. Deci va trebui să demonstrăm că.

1) $a^d - b^d \mid a^n - b^n$ și $a^d - b^d \mid a^m - b^m$;

2) $(\forall)\, \alpha \mid a^m - b^m$ și $\alpha \mid a^n - b^n \Rightarrow \alpha \mid a^d - b^d$

1) Din $d = (m,n)$ rezultă că există $m_1, n_1 \in \mathbf{Z}$ astfel încît $m = dm_1$, $n = dn_1$ și, în plus, $(m_1, n_1) = 1$.

Avem $a^m - b^m = a^{dm_1} - b^{dm_1} = (a^d)^{m_1} - (b^d)^{m_1} = (a^d - b^d)[(a^d)^{m_1-1} + (a^d)^{m_1-2}(b^d) + \ldots + (b^d)^{m_1-1}]$

și deci $(a^d - b^d) \mid (a^m - b^m)$. Analog $(a^d - b^d) \mid (a^n - b^n)$.

2) Fie $\alpha \mid (a^m - b^m)$ și $\alpha \mid (a^n - b^n)$. Trebuie arătat că $\alpha \mid (a^d - b^d)$. Folosind algoritmul lui Euclid pentru $m$ și d avem

$$\begin{aligned} m &= nq_1 + r_1, & 0 \leqslant r_1 < n \\ n &= r_1q_2 + r_2, & 0 \leqslant r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 \leqslant r_3 < r_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 \leqslant r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} \end{aligned}$$

Se știe că $d$ este ultimul rest nenul din succesiunea de mai sus, deci $d = (m,n) = r_n$.

Vom arăta că din $\alpha \mid (a^m - b^m)$ și $\alpha \mid (a^n - b^n)$ rezultă $\alpha \mid (a^{r_1} - b^{r_1})$

Folosim prima relație din algoritmul lui Euclid și avem:

$$a^m - b^m = a^{nq_1+r_1} - b^{nq_1+r_1} = a^{nq_1}a^{r_1} - b^{nq_1}b^{r_1} = a^{nq_1}a^{r_1} - a^{nq_1}b^{r_1} + a^{nq_1}b^{r_1} - b^{nq_1}b^{r_1} = a^{nq_1}(a^{r_1} - b^{r_1}) + b^{r_1}[(a^n)^{q_1} - (b^n)^{q_1}] =$$

$$= a^{nq_1}(a^{r_1} - b^{r_1}) + b^{r_1}(a^n - b^n)\underbrace{[(a^n)^{q_1-1} + \ldots + (b^n)^{q_1-1}]}_{k}$$

și deci

$$a^{nq_1}(a^{r_1} - b^{r_1}) = a^m - b^m - b^{r_1}(a^n - b^n)k.$$

Deoarece $\alpha \mid (a^m - b^m)$ și $\alpha \mid (a^n - b^n)$ rezultă $\alpha \mid (a^{r_1} - b^{r_1})\, a^{nq_1}$. Vom arăta că $\alpha$ și $a^{nq_1}$ sînt prime între ele. Dacă nu ar fi așa ar exista $p$ număr prim astfel ca $p \mid \alpha$ și $p \mid a^{nq_1}$ și deci $p \mid \alpha$ și $p \mid a$. Din $p \mid a$ rezultă $p \mid a^m$. Din $p \mid \alpha$ și $\alpha \mid (a^m - b^m)$ rezultă $p \mid (a^m - b^m)$ și din $p \mid a^m$ rezultă $p \mid (a^m - b^m - a^m) \Rightarrow p \mid b^m \Rightarrow p \mid b$. Din $p \mid a$ și $p \mid b$ rezultă că $a$ și $b$ nu ar fi prime între ele ceea ce este în contradicție cu ipoteza. Rămîne că $\alpha$ și $a^{nq_1}$ sînt prime între ele și din $\alpha \mid (a^{r_1} - b^{r_1})\, a^{nq_1}$ rezultă $\alpha \mid (a^{r_1} - b^{r_1})$.

Folosind acum relația a doua din algoritmul lui Euclid va rezulta că $\alpha \mid (a^{r_2} - b^{r_2})$ ș.a.m.d. $\alpha \mid (a^{r_n} - b^{r_n})$ și deoarece $r_n = d$ rezultă $\alpha \mid (a^d - b^d)$.

**119.** Fie $x, y \in (1,2)$. Trebuie demonstrat că $x * y \in (1,2)$.

Din $x < 1$ și $y < 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ și $y - 1 > 0 \Rightarrow (x - 1)(y - 1) > 0 \Rightarrow xy - x - y + 1 > 0$, (1).

Din $x < 2$ și $y < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$ și $y - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(y - 2) > 0 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 > 0$, (2).

Adunînd (1) cu (2) obținem

$$2xy - 3x - 3y + 5 > 0, \quad (3).$$

Adunînd (1) și (3) obținem

$$3xy - 4x - 4y + 6 > 2xy - 3x - 3y + 5 > 0$$

$$\frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5} > 1 \Rightarrow x * y > 1, \quad (4).$$

Din $xy - 2x - 2y + 4 > 0$ avem

$$4xy - 3xy - 6x + 4x - 6y + 4y + 10 - 6 > 0$$

$$4xy - 6x - 6y + 10 > 3xy - 4x - 4y + 6$$

$$2(2xy - 3x - 3y + 5) > 3xy - 4x - 4y + 6$$

și deoarece din (3), $2xy - 3x - 3y + 5 > 0$ obținem

$$2 > \frac{3xy - 4y - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5} \Rightarrow 2 > x * y, \quad (5)$$

Din (4) și (5) rezultă $1 < x * y < 2$ și deci $*$ este lege de compoziție pe $(1,2)$.

**120.** Verificăm mai întîi dacă $f$ are rădăcini în $\mathbf{Z}_6$. Evident 0 nu este rădăcină. Folosim în continuare schema lui Horner.

| | $\hat{1}$ | $\hat{4}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{5}$ | $\hat{5}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{4}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{4}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{2}$ |
| $\hat{5}$ | $\hat{1}$ | $\hat{3}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{4}$ |

**Deci $f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_6$. Se pune problema: rezultă de aici că $f$ nu se poate descompune în produsul a 2 polinoame din care unul este de gradul 1?**

În cazul acestui polinom răspunsul este da. După cum se vede polinomul are coeficientul dominant $\hat{1}$. În $\mathbf{Z}_6$ doar $\hat{1} \cdot \hat{1} = \hat{1}$ și $\hat{5} \cdot \hat{5} = \hat{1}$. Deci, dacă presupunem că $f$ s-ar descompune în produsul a două polinoame, din care unul de gradul întîi, atunci acesta ar avea coeficientul dominant $\hat{1}$ sau $\hat{5}$, adică ar fi de forma $X + a$ sau $\hat{5}X + a$. Ambele polinoame au rădăcini în $\mathbf{Z}_6$ și deci $f$ ar avea o rădăcină în $\mathbf{Z}_6$, ceea ce este fals, după verificarea anterioară.
Rămîne că $f$ nu se poate descompune în produsul a două polinoame, dintre care unul este de gradul întîi.
Cercetăm dacă $f$ se poate descompune în produsul a două polinoame de gradul al doilea.
Fie $f = (aX^2 + bX + c)(mX^2 + nX + p) = amX^4 + (an + bm)X^3 + (ap + bn + mc)X^2 + (bp + nc)X + pc$.
Prin identificare obținem sistemul

$$\begin{cases} am = \hat{1} \\ an + bm = \hat{4} \\ ap + bn + mc = \hat{0} \\ bp + nc = \hat{1} \\ pc = \hat{2} \end{cases}$$

Din prima relație avem $(a = \hat{1} \,\&\, m = \hat{1})$ sau $(a = \hat{5} \,\&\, m = \hat{5})$.
Din ultima relație avem $(p = \hat{1} \,\&\, c = \hat{2})$ sau $(p = \hat{2} \,\&\, c = \hat{1})$ sau $(p = \hat{2} \,\&\, c = \hat{4})$ sau $(p = \hat{4} \,\&\, c = \hat{2})$ sau $(p = \hat{4} \,\&\, c = \hat{5})$ sau $(p = \hat{5} \,\&\, c = \hat{4})$.
Caz 1. $a = \hat{1}$, $m = \hat{1}$, $p = \hat{1}$, $c = \hat{2}$. Sistemul se reduce la

$$\begin{aligned} n + b &= \hat{4} \\ bn &= \hat{3} \\ b + \hat{2}n &= \hat{1} \end{aligned}$$

Din a doua relație rezultă $(b = \hat{1} \,\&\, n = \hat{3})$ sau $(b = \hat{3} \,\&\, n = \hat{1})$ sau $(b = \hat{3} \,\&\, n = \hat{3})$ etc.
Pentru $b = \hat{1}$ și $n = \hat{3}$ se verifică toate relațiile. Deci

$$f = (X^2 + X + \hat{2})(X^2 + \hat{3}X + \hat{1})$$

și $f$ se poate descompune în produsul a două polinoame de grad mai mic decît patru.

**121.** Relațiile lui Viete sînt

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 \\ x_1x_2x_3 = 4 \end{cases}$$

Calculînd valoarea determinantului cu regula lui Sarrus obținem:

$D = (x_{\tau(1)}\, x_{\tau(2)}\, x_{\tau(3)})^2 + 2x_{\tau(1)}\, x_{\tau(2)}\, x_{\tau(3)} - (x^4_{\tau(1)} + x^4_{\tau(2)} + x^4_{\tau(3)})$

Dar $x_{\tau(1)}\, x_{\tau(2)}\, x_{\tau(3)} = x_1x_2x_3 = 4$ și

$$x^4_{\tau(1)} + x^4_{\tau(2)} + x^4_{\tau(3)} = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4.$$

Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$. Deoarece $x_1, x_2, x_3$ sînt rădăcini ale ecuației $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ avem

$$\begin{aligned} x_1^3 - 2x_1^2 + 3x_1 - 4 &= 0 \\ x_2^3 - 2x_2^2 + 3x_2 - 4 &= 0 \\ x_3^3 - 2x_3^2 + 3x_3 - 4 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Prin adunarea relațiilor (1), ținînd seama de notația făcută,

$$S_3 - 2S_2 + 3S_1 - 12 = 0, \qquad (2).$$

Deoarece $x_1, x_2, x_3$ sînt evident nenule, înmulțim relațiile (1) cu $x_1, x_2$, respectiv $x_3$ obținem

$$\begin{aligned} x_1^4 - 2x_1^3 + 3x_1^2 - 4x_1 &= 0 \\ x_2^4 - 2x_2^3 + 3x_2^2 - 4x_2 &= 0 \\ x_3^4 - 2x_3^3 + 3x_3^2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Prin adunarea acestor relații, ținînd din nou seama de notația făcută, avem

$$S_4 - 2S_3 + 3S_2 - 4S_1 = 0, \qquad (3).$$

Avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -2$
$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2S_2 - 3S_1 + 12 = 2$
$S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2S_3 - 3S_2 + S_14 = 18$
Deci $D = 4^2 + 8 - 18 = 6$.

**122.** Sistemul se poate scrie matricial astfel

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Notăm $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ și relația anterioară se scrie

$$X_{n+1} = A \cdot X_n.$$

Afirmăm că $X_{n+1} = A^nX_1$. Demonstrăm prin inducție. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă. Presupunem $X_{n+1} = A^nX_1$ și demonstrăm că $X_{n+2} = A^{n+1}X_1$. Într-adevăr, ținînd seama de asociativitatea operației de înmulțire a matricelor, avem

$$X_{n+2} = AX_{n+1} = A(A^nX_1) = (AA^n)X_1 = A_{n+1}X_1.$$

Problema se reduce la calculul matricei $A^n$. Acesta a fost făcut în problema **101.** Deci

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+2)\,2^{n-1} & n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & (2-n)\,2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

După înmulțirea matricelor din membrul drept, obținem.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+2)\,2^{n-1} - n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} - (2-n)\,2^n \end{pmatrix}$$

de unde se obțin șirurile corespunzător:

$$a_{n+1} = (n+2)2^{n-1} - n2^{n-1}$$
$$b_{n+1} = -n2^{n-1} - (2-n)2^n.$$

**123.** Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Avem $X^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & y(x+t) \\ z(x+t) & t^2+yz \end{pmatrix}$, de unde, prin identificare se obține sistemul.

$$\begin{cases} x^2 + yz = \hat{1} \\ y(x+t) = \hat{2} \\ z(x+t) = \hat{0} \\ t^2 + yz = \hat{1} \end{cases}$$

Din $z(x+t) = \hat{0}$ avem $z = \hat{0}$ sau $x + t = \hat{0}$.

Dacă $x + t = \hat{0}$ atunci relația a doua a sistemului devine $\hat{0} = \hat{2}$ ceea ce este absurd.

Deci $z = \hat{0}$ și sistemul se reduce la următorul

$$\begin{cases} x^2 = \hat{1} \\ y(x+t) = \hat{2} \\ t^2 = \hat{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \hat{1} \text{ sau } x = \hat{2} \\ y(x+t) = \hat{2} \\ t = 1 \text{ sau } t = \hat{2} \end{cases}$$

Caz 1. $x = \hat{1}$, $t = \hat{1}$. Atunci $y(x+t) = \hat{2} \Rightarrow \hat{2}y = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{1}$.

Deci $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Caz 2. $x = \hat{1}$, $t = \hat{2}$. Atunci $y(x+t) = \hat{2} \Rightarrow \hat{0} = \hat{2}$, absurd.

Caz 3. $x = \hat{2}$, $t = \hat{1}$. Analog caz 2.

Caz 4. $x = \hat{2}$, $t = \hat{2}$. Atunci $y(x+t) = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{2} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$

Deci soluții $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

**124.** Fie $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Din enunț avem

$$\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{2}a + \hat{3}d & \hat{2}b + \hat{3}e & \hat{2}c + \hat{3}f \\ a + \hat{2}d & b + \hat{2}e & c + \hat{2}f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix},$$

de unde se obțin trei sisteme de câte 2 ecuații cu câte două necunoscute, și anume.

$$\begin{cases} \hat{2}a + \hat{3}d = \hat{2} \\ a + \hat{2}d = \hat{1} \end{cases}; \quad \begin{cases} \hat{2}b + \hat{3}e = \hat{3} \\ b + \hat{2}e = \hat{0} \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{2}c + \hat{3}f = \hat{0} \\ c + \hat{2}f = \hat{3} \end{cases}$$

Se observă că matricea coeficienților este aceeași pentru toate sistemele, și $\Delta_p = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{1} \Rightarrow \Delta_p^{-1} = \hat{1}$. Avem succesiv:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{1} \Rightarrow a = \Delta_a \Delta_p^{-1} = \hat{1}, \quad \Delta_d = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{vmatrix} = \hat{0} \Rightarrow d = \hat{0},$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \hat{3} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{2} \Rightarrow b = \hat{2}, \quad \Delta_e = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{vmatrix} = \hat{1} \Rightarrow e = \hat{2},$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{3} \Rightarrow c = \hat{3}, \quad \Delta_f = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{2} \Rightarrow f = \hat{2}.$$

Deci soluție

$$X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$$

Altfel. Deoarece dat $A = \hat{1}$ și $(\det A)^{-1} = \hat{1} \Rightarrow A$ inversabilă. Calculăm inversa lui $A$. Avem

$$A^t = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = (\det A)^{-1} A^* = A^* =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}.$$

Avem $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$

125. Avem că $A$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det A$ este inversabil în $\mathbf{Z}_5$. Avem

$$\det A = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{4} & \hat{2} \end{vmatrix} = \widehat{3} \text{ și } (\det A)^{-1} = \widehat{2}.$$

Avem $A' = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ și calculăm $A^*$. Complementii algebrici sînt

$$d_{11} = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{0},\ d_{12} = -\begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{1},\ d_{13} = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{vmatrix} = \hat{2}$$

$$d_{21} = -\begin{vmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{4},\ d_{22} = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{2},\ d_{23} = -\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{vmatrix} =$$

$$= -\hat{1} = \hat{4}$$

$$d_{31} = \begin{vmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{4} \end{vmatrix} = \hat{2},\ d_{32} = -\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{4} \end{vmatrix} = -\hat{4} = \hat{1},\ d_{33} =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{1}$$

și deci

$$A^* = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

și

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} A^* = \widehat{2} \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{4} & \hat{3} \\ \hat{4} & \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}$$

**126.** Avem

$$\det A = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{3} \Rightarrow (\det A)^{-1} = \hat{3} \Rightarrow A \text{ inversabilă.}$$

Calculăm transpusa matricei $A$

$$A^t = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}$$ și calculăm $A^*$. Avem complementii:

$$d_{11} = \begin{vmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{1},\ d_{12} = -\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{1},\ d_{13} = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{vmatrix} = \hat{1}$$

$$d_{21} = -\begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{1},\ d_{22} = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{2},\ d_{23} = -\begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{vmatrix} = -\hat{2} = \hat{2}$$

$$d_{31} = \begin{vmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{vmatrix} = \hat{1},\ d_{32} = -\begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{vmatrix} = \hat{1},\ d_{33} = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{2}$$

Deci reciproca matricei $A$ este

$$A^* = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$$

Inversa matricei $A$ este

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} A^* = \hat{3}\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}$$

**127.** Calculăm determinantul matricei sistemului

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \hat{m} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{m} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{m} \end{vmatrix}$$

Adunăm toate liniile la prima și avem

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} m+\hat{2} & m+\hat{2} & m+\hat{2} \\ \hat{1} & m & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & m \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{m} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{m} \end{vmatrix}$$

Înmulțim prima coloană cu $\hat{4}$ și o cumulăm la celelalte și avem

$$\Delta_p = (m+2)\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & m+\hat{4} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & m+\hat{4} \end{vmatrix} = (m+\hat{2})\,(m+\hat{4})^2$$

Caz 1. $\Delta_p = \hat{0} \Rightarrow (m+\hat{2})(m+\hat{4})^2 = \hat{0} \Rightarrow m+\hat{2} = \hat{0}$ sau $m+\hat{4} = \hat{0}$ $\Rightarrow m = \hat{3}$ sau $m = \hat{1}$.

Caz 1.1. $m = \hat{3}$. Sistemul devine

$$\begin{cases} \hat{3}x + y + z = \hat{1} \\ x + \hat{3}y + z = \hat{2} \\ x + y + \hat{3}z = \hat{3} \end{cases}$$

Adunînd toate relațiile obținem $\hat{0} = \hat{1}$ ceea ce este absurd.

Caz 1.2. $m = \hat{1}$. Sistemul devine

$$\begin{cases} x + y + z = \hat{1} \\ x + y + z = \hat{2} \\ x + y + z = \hat{3} \end{cases}$$

ceea ce este, evident, imposibil.

Caz 2. $m \neq \hat{3}$, și $m \neq \hat{1} \Rightarrow m \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$. În acest caz $\Delta_p \neq \hat{0}$ și deoarece $\mathbf{Z}_5$ este corp rezultă că $\Delta_p$ este inversabil și

$$\Delta_p^{-1} = [(m+2)\,(m+4)^2]^{-1}$$

Calculăm $\Delta_x$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{2} & m & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & m \end{vmatrix}$$

Înmulțim prima coloană cu $\hat{4}$ și o adunăm la celelalte. Avem

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{2} & m+\hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{3} & m+\hat{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+\hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & m+\hat{2} \end{vmatrix} = m^2 + \hat{4}$$

și deci $x = \Delta_x \Delta_p^{-1} = (m^2+4)[(m+2)(m+4)^2]^{-1}$.

Calculăm $\Delta_y$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{3} & m \end{vmatrix}.$$

Înmulțim coloana 1 cu $\hat{3}$ și o adunăm la coloana 2, și apoi înmulțim coloana 1 cu $\hat{4}$ și o adunăm la coloana 3. Avem

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & \hat{1}+\hat{3}m & \hat{1}+\hat{4}m \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{4}+m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \hat{1}+\hat{3}m & \hat{1}+\hat{4}m \\ \hat{1} & \hat{4}+m \end{vmatrix} =$$

$$= -(\hat{3}m^2 + \hat{4}m + \hat{3}).$$

și deci $y = -(\hat{3}m^2 + \hat{4}m + \hat{3})[(m+\hat{2})(m+\hat{4})^2]^{-1}$

Calculăm $\Delta_z$ :

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & m & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix}$$

Înmulțim coloana 1 cu $\hat{4}$ și o adunăm la coloana 2; apoi înmulțim coloana 1 cu $\hat{2}$ și o adunăm la coloana 3. Avem $\Delta_z =$

$$= \begin{vmatrix} m & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & m & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & \hat{4}m+\hat{1} & \hat{2}m+\hat{1} \\ \hat{1} & m+\hat{4} & \hat{4} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{4}m+\hat{1} & \hat{2}m+\hat{1} \\ m+\hat{4} & \hat{4} \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{3}m^2 + \hat{2}m.$$

și deci $z = (\hat{3}m^2 + \hat{2}m)[(m+\hat{2})(m+\hat{4})^2]^{-1}$.

Recapitulînd avem

pentru $m = \hat{3}$ și $m = \hat{1}$ — sistem incompatibil

pentru $m \in \{\hat{0},\hat{2},\hat{4}\}$ soluțiile sînt

$$x = (m^2 + \hat{4})[(m+\hat{2})(m+\hat{4})^2]^{-1}$$

$$y = -(\hat{3}m^2 + \hat{4}m + \hat{3})[(m+\hat{2})(m+\hat{4})^2]^{-1}$$

$$z = (\hat{3}m^2 + \hat{2}m)[(m+2)(m+4)^2]^{-1}.$$

**128.** Vom arăta că polinomul $f \in \mathbf{Z}_6[X]$,

$$f = \hat{4}X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3}$$

îndeplinește condițiile enunțate.

Arătăm că $f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_6$. Evident 0 nu este rădăcină. Cercetăm cu schema lui Horner.

| | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{4}$ | $\hat{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{1}$ | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ | $\hat{5}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{4}$ | $\hat{4}$ | $\hat{4}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{4}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{4}$ | $\hat{4}$ | $\hat{0}$ | $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{5}$ | $\hat{4}$ | $\hat{4}$ | $\hat{4}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ |

Deci $f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_6$.

Cercetăm dacă $f$ se descompune în produsul a două polinoame, cu coeficienți în $\mathbf{Z}_6$, dintre care unul să fie de gradul întîi.

Avem $f = (aX + b)(mX^3 + nX^2 + pX + q)$. După calcule obținem

$$f = amX^4 + (an + bm)X^3 + (ap + bn)X^2 + (aq + bp)X + bq$$

Prin identificarea coeficienților obținem sistemul:

$$\begin{cases} am = \hat{4} \\ an + bm = \hat{2} \\ ap + bn = \hat{2} \\ aq + bp = \hat{4} \\ bq = \hat{3} \end{cases}$$

Din $am = \hat{4}$ rezultă multe cazuri. Alegem $a = \hat{2}$ și $m = \hat{2}$.

Din $bq = \hat{3}$ rezultă cinci posibilități. Alegem $b = \hat{1}$ și $q = \hat{3}$.

Sistemul anterior se reduce la următorul:

$$\begin{cases} \hat{2}n + \hat{2} = \hat{2} \\ \hat{2}p + n = \hat{2} \\ y = \hat{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{2}n = \hat{0} \\ n + \hat{2} = \hat{2} \Rightarrow n = \hat{0} \text{ și } p = \hat{4}. \\ p = \hat{4} \end{cases}$$

Deci $a = \hat{2}$, $b = \hat{1}$, $m = \hat{2}$, $n = \hat{0}$, $p = \hat{4}$, $q = \hat{3}$ și

$$f = \hat{4}X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3} = (\hat{2}X + \hat{1})(\hat{2}X^3 + \hat{4}X + \hat{3}).$$

După cum se vede, $f$ nu are rădăcini în $\mathbf{Z}_6$, și totuși se poate descompune în produsul a două polinoame, dintre care unul are gradul întîi.

Din $\hat{7}c = \hat{1} \Rightarrow c = \hat{7}$. Din $\hat{7}b + \hat{4}c = \hat{0} \Rightarrow \hat{7}b = \hat{4} \Rightarrow b = \hat{4}$. Din $\hat{6}c + \hat{4}b + \hat{7}a = \hat{0} \Rightarrow \hat{7}a = \hat{6} \Rightarrow a = \hat{2}$ și care verifică și primele două ecuații.

Deci inversul polinomului dat este $\hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{7}$, adică

$$(\hat{6}X^2 + \hat{4}X + \hat{7})(\hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{7}) = 1.$$

**130.** Vom da un exemplu. Fie $g_1,g_2,g_3 \in \mathbf{Z}_6[X]$,

$$g_1 = \hat{2}X + \hat{1}, \quad g_2 = \hat{3}X + \hat{5}, \quad g_3 = \hat{4}X + \hat{5}$$

Se verifică ușor că $g_1,g_2,g_3$ nu au rădăcini în $\mathbf{Z}_6$. Avem

$$f = g_1g_2g_3 = (\hat{2}X + \hat{1})(\hat{3}X + \hat{5})(\hat{4}X + \hat{5}) = \hat{4}X^2 + X + \hat{1}$$

și $f(\hat{1}) = \hat{4} + \hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$. Rămîne că $g_1,g_2,g_3$ nu au rădăcini în $\mathbf{Z}_6$, dar produsul lor are rădăcini în $\mathbf{Z}_6$.

**131.** Considerăm că $x,y,z$ sînt rădăcinile unui polinom $f \in \mathbf{Z}_7[X]$, fie acesta $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a,b,c \in \mathbf{Z}_7$. Relațiile lui Viete sînt

$$\begin{cases} x + y + z = -a \\ xy + xz + yz = b \\ xyz = -c \end{cases}$$

Scopul nostru este să determinăm pe $a,b,c$ și apoi ,să găsim rădăcinile polinomului $f$, care vor fi tocmai valorile $x,y,z$ soluțiile sistemului dat.

Avem $x + y + z = \hat{1} = -a \Rightarrow a = -\hat{1} \Rightarrow a = \hat{6}$.

Din relația $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - \hat{2}(xy + xz + yz)$ avem

$$\hat{2}(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

și înlocuind cu valorile din enunț, obținem

$$\hat{2}(xy + xz + yz) = \hat{6} \Rightarrow \hat{2}b = \hat{6} \Rightarrow b = 3.$$

Se cunoaște relația

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz$$

Înlocuind acum cu valorile obținute anterior avem

$$\hat{3}xyz = \hat{2} \Rightarrow xyz = \hat{3} \Rightarrow -c = \hat{3} \Rightarrow c = \hat{4}$$

**129.** Acceptăm următoarea propoziție cunoscută.

Propoziție. Fie $A$ un inel comutativ și $f \in A[X]$. Atunci $f$ este inversabil dacă și numai dacă termenul liber este inversabil și toți ceilalți coeficienți sînt nilpotenți.

Reamintim că $a \in A$ este nilpotent $\Leftrightarrow (\exists)\ n \in \mathbf{N}^*$ astfel ca $a^n = 0$.

Să arătăm că putem aplica propoziția. Într-adevăr $\hat{4}^2 = \hat{0}$, $\hat{6}^3 = \hat{0}$, $\hat{4}^2 = \hat{0}$ și $\hat{7}$ este inversabil, fiind prim cu 8, și $\hat{7} \cdot \hat{7} = \hat{1}$.

Rămîne că $f$ este inversabil, fie $g$ inversul său.

După cum se observă din propoziție nu rezultă cum se găsește inversul lui $f$ și nici măcar care este gradul acestui invers.

Caz 1. grad $g = 0$. Avem $g = k$ și atunci

$$f \cdot g = (\hat{6}X^2 + \hat{4}X + \hat{7})k = \hat{6}kX^2 + \hat{4}kX + \hat{7}k = \hat{1}$$

de unde $\hat{6}k = \hat{0}$, $\hat{4}k = \hat{0}$ și $\hat{7}k = \hat{1}$ ceea ce este imposibil.

Caz 2. grad $g = 1$. Dacă $g = aX + b$ atunci

$$f \cdot g = (\hat{6}X^2 + \hat{4}X + \hat{7})(aX + b) = \hat{6}aX^3 + (\hat{6}b + \hat{4}a)X^2 + (\hat{4}b + \hat{7}a)X + \hat{7}b$$

Din $fg = \hat{1}$, prin identificarea coeficienților, obținem

$$\begin{cases} \hat{6}a = \hat{0} \\ \hat{6}b + \hat{4}a = \hat{0} \\ \hat{4}b + \hat{7}a = \hat{0} \\ \hat{7}b = \hat{1} \end{cases}$$

Din $\hat{7}b = \hat{1} \Rightarrow b = \hat{7}$. Din $\hat{4}b + \hat{7}a = \hat{0} \Rightarrow \hat{7}a = \hat{4} \Rightarrow a = \hat{4}$. Verificăm în primele două ecuații. $\hat{6}a = \hat{6} \cdot \hat{4} = \hat{0}$ și prima se verifică. $\hat{6}b + \hat{4}a = \hat{6} \cdot \hat{7} + \hat{0} = \hat{2} \neq \hat{0}$ și a doua nu se verifică. Deci $g$ nu poate avea gradul întîi.

Caz 3. grad $g = 2$. Dacă $g = aX^2 + bX + c$ atunci

$$fg = (\hat{6}X^2 + \hat{4}X + \hat{7})(aX^2 + bX + c) = \hat{6}aX^4 + (\hat{6}b + \hat{4}a)X^3 + (\hat{6}c + \hat{4}b + \hat{7}a)X^2 + (\hat{7}b + \hat{4}c)X + \hat{7}c$$

Din $fg = \hat{1}$, prin identificarea coeficienților avem

$$\begin{cases} \hat{6}a = \hat{0} \\ \hat{6}b + \hat{4}a = \hat{0} \\ \hat{6}c + \hat{4}b + \hat{7}a = \hat{0} \\ \hat{7}b + \hat{4}c = \hat{0} \\ \hat{7}c = \hat{1} \end{cases}$$

Cercetăm rădăcinile lui $f$ cu scema lui Horner. Evident 0 nu este rădăcină a lui $f$. Avem

| | $\hat{1}$ | $\hat{6}$ | $\hat{3}$ | $\hat{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ este rădăcină a lui $f$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{0}$ | | $\hat{2}$ este rădăcină a lui $f$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{1}$ | $\hat{5}$ | | | |
| $\hat{4}$ | $\hat{1}$ | $\hat{6}$ | | | |
| $\hat{5}$ | $\hat{1}$ | $\hat{0}$ | | | $\hat{5}$ este rădăcină a lui $f$ |

Deci rădăcinile polinomului $f$ sînt $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{5}$ de unde rezultă

$$x = \hat{1},\ y = \hat{2},\ z = \hat{5}$$

împreună cu permutările corespunzătoare, deoarece sistemul dat este simetric în $x,y,z$. Putem scrie aceasta astfel:

notăm $a_1 = \hat{1}$, $a_2 = \hat{2}$, $a_3 = \hat{5}$. Atunci soluțiile sistemului sînt

$$(x,y,z) \in \{(a_{\tau(1)}, a_{\tau(2)}, a_{\tau(3)}) \mid (\forall)\tau \in S_3\}$$

unde $S_3$ este grupul permutărilor de gradul trei.

**132.** Deoarece $\hat{2}$ nu este inversabil în $\mathbf{Z}_6$, rezultă că nu se poate aplica algoritmul de împărțire cunoscut. Dacă există $h$ și $r$ cu proprietățile enunțate, atunci acestea se vor determina folosind metoda coeficienților nedeterminați. Fie

$$h = aX^2 + bX + c \text{ și } r = mX + n,\ a,b,c,m,n \in \mathbf{Z}_6.$$

Avem

$$f = (\hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1})(aX^2 + bX + c) + mX + n =$$
$$= \hat{2}aX^4 + (\hat{2}b + \hat{3}a)X^3 + (\hat{2}c + \hat{3}b + a)X^2 + (\hat{3}c + b + m)X +$$
$$+ c + n$$

Identificînd coeficienții, obținem sistemul

$$\begin{cases} \hat{2}a = \hat{4} \\ \hat{2}b + \hat{3}a = \hat{0} \\ \hat{2}c + \hat{3}b + a = \hat{3} \\ \hat{3}c + b + m = \hat{3} \\ c + n = \hat{2} \end{cases} \qquad (1)$$

Din $\hat{2}a = \hat{4}$ rezultă $a = \hat{2}$ sau $a = \hat{5}$.

Caz 1. $a = \hat{2}$. Sistemul (1) se reduce la

$$\begin{cases} \hat{2}b = \hat{0} \\ \hat{2}c + \hat{3}b + \hat{2} = \hat{3} \\ \hat{3}c + b + m = \hat{3} \\ c + n = \hat{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Din $\hat{2}b = 0$ rezultă $b = \hat{0}$ sau $b = \hat{3}$.

Caz 1.1. $b = \hat{0}$. Sistemul (2) devine

$$\begin{cases} \hat{2}c = \hat{1} \\ \hat{3}c + m = \hat{3} \\ c + n = \hat{2} \end{cases}$$

Dar $\hat{2}c = \hat{1}$ este imposibil în $\mathbf{Z}_6$.

Caz 1.2. $b = \hat{3}$. Sistemul (2) devine

$$\begin{cases} \hat{2}c = \hat{4} \\ \hat{3}c + m = \hat{0} \\ c + n = \hat{2} \end{cases}$$

Din $\hat{2}c = \hat{4}$ rezultă $c = \hat{2}$ sau $c = \hat{5}$.

Pentru $c = \hat{2}$ avem $m = \hat{0}$ și $n = \hat{0}$ și deci

$$f = \hat{4}X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{2} = (\hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1})(\hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}), \quad \text{(i)}$$

Pentru $c = \hat{5}$ avem $n = \hat{3}$ și $m = \hat{3}$ și

$$f = (\hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1})(\hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{5}) + \hat{3}X + \hat{3}, \quad \text{(ii)}.$$

Din (i) și (ii) rezultă că $f$ se poate scrie ca $gh + r$, cu grad $r <$ grad $g$. Mai mult, această scriere nu este unică.

## BIBLIOGRAFIE


1 *Ion D. Ion,* O demonstrație elementară pentru o teoremă a lui Frobenius. G.M. 11—12 (1987).

2. *P. Ionescu* și *S. Stossel,* On the solutions of algebraic equations. G.M.—M.3 (1989).

3. *Ion D. Ion, Năstăsescu C., Niță C.,* Complemente de algebră, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1984.

4. G.M. 1982—1989.